

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

---

ÉCOLE DOCTORALE  
MÉCANIQUE, THERMIQUE ET GÉNIE CIVIL

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année 2007

# Dynamique interne des planètes telluriques et observables géophysiques de surface

---

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Sciences de la Terre

Spécialité : Planétologie

*Présentée  
et soutenue publiquement par*

**François COUTURIER**

*Le 27 avril 2007, devant le jury ci-dessous*

Président	M. Olivier DAUTEUIL, Géosciences Rennes
Rapporteurs	Mme Luce FLEITOUT, École Normale Supérieure de Paris M. Stéphane LABROSSE, École Normale Supérieure de Lyon
Examineurs	M. Frédéric DESCHAMPS, Institut für Geophysik, Zürich M. Mark WIECZOREK, IPGP-LESP Saint-Maur-des-Fossés

Directeur de thèse : Christophe SOTIN, Professeur à l'Université de Nantes

Co-encadrant : Gaël CHOBLET, Chargé de recherche au CNRS









## Remerciements

Je ne peux commencer ce manuscrit sans remercier les personnes grâce auxquelles j'ai pu réaliser cette thèse. Mes pensées s'adressent en premier lieu à Christophe SOTIN qui m'a permis de découvrir l'astronomie puis la géophysique dès mes premières années de fac et grâce à qui j'ai pu obtenir une bourse de dernière minute pour commencer ce travail. Je tiens également à remercier Gaël CHOBLET qui m'a fourni le code de convection thermique sans lequel ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je remercie également Ondrej ČADEK de l'université de Prague, qui nous a accueillis pendant 1 mois dans la capitale tchèque. Un merci également à Caroline DUMOULIN qui a répondu présente à chacune de mes questions. J'adresse également mes remerciements à tous les membres du jury : Luce FLEITOUT, Stéphane LABROSSE, Frédéric DESCHAMPS, Mark WIECZOREK et Olivier DAUTEUIL. Merci à eux d'avoir pris le temps de lire mon manuscrit et d'avoir accepté de juger mon travail de thèse.

Un petit mot pour tout le laboratoire de planétologie : Claudius qui était là lorsqu'il fallait « papoter » avec les machines, Marie-Claire pour les « papiers » sans oublier Liliane et Alain.

Une pensée pour tous ceux que j'ai côtoyés pendant ces 3 ans et qui sont aujourd'hui partis vers d'autres horizons : Yoann, qui s'est envolé pour le GFZ, Pierre qui est parti voir les kangourous, Olivier, notre fournisseur officiel de Chokotoff ©, Laurent *Ophiolite Man* (j'attends encore ma revanche au bowling !), Jean-Philippe le cycliste aux US, sans oublier Loïc, JB, Judith...

Une pensée également pour ceux qui sont encore la tête dans le guidon. Matthieu et ses glaçons, Régis et son muscadet, Laetitia la martienne, Pierre-André *Spiderman* qui tisse partout, Charles *Spectroman*, Guillaume l'astram fraîchement arrivé et les p'tits nouveaux que je n'ai pas encore vus...bon courage à tous, vous tenez le bon bout !

Spéciale dédicace à mon club d'astro préféré VOYAGER 3 Astronomie et à ses joyeux membres. Avec eux, le vendredi soir est synonyme de détente, d'échanges et de longues observations sous le ciel étoilé de Sévérac. Que de nuits passées sous les étoiles, loin de la pollution lumineuse, au calme...Souvenirs de WE (g)astro, d'Astrobrigolos, de mouche congelée dans le frigo, d'animations sous un grand chêne, de RIC, de RAP, de RICARD, de NdE, de FDLS...et ce projet de longue date....enfin sorti de terre. Un coin rien que pour nous...et notre bon gros pépère de 314 enfin à l'abris....A bientôt sous les étoiles...

Un petit mot pour ma famille, les parents qui ont supporté mes sautes d'humeur au gré des péripéties journalières et qui nous prêtent sans peur le camping-car (!). Sans oublier mes grandes sœurs qui confondent les mots astrologie et astronomie (mais non, je ne vous charrie pas !) et qui ont toujours été là.

Une pensée toute particulière pour mon Elvina qui pendant de longues soirées, s'est évertuée à corriger mes fautes d'orthographe (tant que ça ? !) mais qui m'a surtout supporté (dans tous les sens du terme) jusqu'au bout et a su m'encourager dans les moments difficiles.

Pour finir, un petit clin d'œil à tous les membres du LESP de Saint Maur et plus particulièrement à Philippe, Mark, Cédric, François, Giovanni, Céline, Matthieu, Lucie et Joséphine...

Pour tout cela, pour tout ces gens, ces rencontres, ces moments de doute, d'espoir, de crise de nerfs, de découragement, mais aussi de satisfaction, de fou rire et de plaisir....

Sur ce, je vous laisse et vous donne rendez-vous dans le Gers....les amoureux des étoiles comprendront...



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Les planètes telluriques</b>	<b>1</b>
1.1 Rappel mathématique . . . . .	1
1.1.1 Définition de la topographie et de la gravité . . . . .	1
1.1.2 Décomposition des données en harmoniques sphériques . . . . .	2
1.1.3 Analyse spectrale . . . . .	3
1.2 La Terre . . . . .	4
1.2.1 Topographie et gravité . . . . .	5
1.2.2 Analyse spectrale de la topographie et de la gravité . . . . .	7
1.2.3 Dynamique interne . . . . .	8
1.3 Vénus . . . . .	9
1.3.1 Topographie et gravité . . . . .	9
1.3.2 Analyse spectrale de la topographie et de la gravité . . . . .	13
1.4 Mars . . . . .	16
1.4.1 Topographie et gravité . . . . .	16
1.4.2 Analyse spectrale de la topographie et de la gravité . . . . .	22
1.5 Conclusions du chapitre . . . . .	25
<b>2 Potentiel de pesanteur et hypsométrie de Mars</b>	<b>27</b>
2.1 Forme de Mars . . . . .	27
2.1.1 Le niveau zéro ou comment définir l'aréoïde . . . . .	27

2.1.2	Ellipsoïde tri-axial . . . . .	30
2.2	Anomalie de gravité . . . . .	31
2.2.1	Anomalie de l'aréoïde . . . . .	31
2.2.2	Gravité à l'air libre . . . . .	33
2.3	Potentiel de pesanteur . . . . .	33
2.4	Paléo-lignes de rivage . . . . .	36
2.4.1	Historique . . . . .	36
2.4.2	Calcul du potentiel de pesanteur le long de Deuteronilus . . . . .	40
2.4.3	Volume de l'océan martien . . . . .	47
2.5	Histoire géologique de Mars . . . . .	50
2.5.1	La découverte des phyllosilicates ou l'eau en abondance . . . . .	52
2.5.2	L'eau se change en glace . . . . .	53
2.5.3	Les lacs acides et les sulfates hydratés . . . . .	54
2.5.4	Mars désertique . . . . .	54
2.6	L'histoire de Deuteronilus . . . . .	56
2.7	Hypsométrie . . . . .	58
2.7.1	Introduction . . . . .	58
2.7.2	Sources de données . . . . .	58
2.7.3	Hypsométrie de la Terre . . . . .	59
2.7.4	Hypsométrie de Vénus . . . . .	62
2.7.5	Hypsométrie de Mars . . . . .	65
2.7.6	Conclusions . . . . .	71
2.8	Conclusions du chapitre . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Outils numériques</b>	<b>73</b>
3.1	Convection thermique en domaine sphérique 3D . . . . .	73
3.1.1	Introduction . . . . .	73
3.1.2	Modèle physique et rhéologie . . . . .	74
3.1.3	Nombres caractéristiques . . . . .	75

3.1.4	Les équations de la convection . . . . .	76
3.1.5	La sphère cubique . . . . .	79
3.1.6	Maillage entrelacé . . . . .	82
3.1.7	Solver . . . . .	87
3.1.8	Schéma d'advection-diffusion . . . . .	89
3.1.9	Parallélisme . . . . .	90
3.1.10	Soumissions des travaux . . . . .	93
3.2	Géoïde et topographie dynamique . . . . .	95
3.2.1	Équations . . . . .	95
3.2.2	Méthode spectrale . . . . .	98
3.3	Visualisation des résultats . . . . .	100
3.3.1	Data Explorer . . . . .	100
3.3.2	Architecture du logiciel . . . . .	101
3.4	Conclusions du chapitre . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Topographie dynamique et géoïde</b>	<b>105</b>
4.1	Applications . . . . .	105
4.2	Premiers résultats . . . . .	108
4.2.1	Nombre de Nusselt . . . . .	108
4.2.2	Profils de température . . . . .	108
4.2.3	Champs de température . . . . .	109
4.2.4	Topographie dynamique de surface et Géoïde . . . . .	111
4.2.5	Spectres de puissance . . . . .	116
4.3	Influence de la viscosité variable . . . . .	117
4.4	Influence du chauffage interne . . . . .	119
4.5	Similarités avec Vénus . . . . .	120
4.6	Conclusions . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>125</b>

<b>Bibliographie et annexes</b>	<b>131</b>
<b>A Description des schémas d'advection</b>	<b>145</b>
<b>B Méthode spectrale</b>	<b>149</b>
B.1 Passage de l'expression complexe à l'expression réelle . . . . .	149
B.2 Analyse spectrale . . . . .	150
<b>Liste des notations</b>	<b>153</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>155</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>160</b>

*"La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.  
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi."*  
(Albert Einstein)





# Introduction

Les planètes telluriques Mercure, Vénus, la Terre et Mars sont caractérisées par une faible masse, un petit rayon et une forte densité, comparées aux planètes géantes gazeuses. Leur composition chimique est dominée par des roches et des éléments lourds comme le fer et le nickel, concentrés dans le noyau. Les mesures sismologiques, gravimétriques et magnétiques indiquent que l'intérieur de ces planètes est fortement différencié et subdivisé en plusieurs couches, comme dans le cas de la Terre, en un noyau métallique liquide ou non, un manteau de silicates et une croûte composée des produits issus de la fusion partielle du manteau sous jacent. Dans le cas de la Terre, de Vénus et de Mars, les pressions rencontrées dans le manteau sont suffisamment élevées pour que des transitions de phases apparaissent, notamment pour l'olivine et les pyroxènes. Étant donné que la profondeur à laquelle se produisent de tels changements de densité est fonction des conditions de température, de pression et de la composition en fer des roches mantelliques, les observations sismologiques à la surface de ces planètes sont susceptibles de fournir des informations sur l'état thermique et les différences compositionnelles des planètes telluriques. Ainsi, les premières études sur l'intérieur de la Terre ont été possibles grâce à l'apparition d'outils géophysiques tels que les sismomètres capables d'enregistrer le trajet des ondes sismiques à travers les différentes couches terrestres. Malheureusement, dans le cas des autres planètes telluriques, l'étude de leur structure interne est limitée car, en dehors de la Lune, aucune donnée sismologique n'est disponible. L'une des manières d'étudier l'intérieur de ces planètes est l'analyse des relations topographie/gravité, données qui sont précisément mesurées par les sondes spatiales en orbite.

Le manteau des planètes telluriques est constitué principalement de silicates, qui peuvent localement être fondus, mais qui sont majoritairement solides. En réponse à des impulsions de courtes périodes, comme des ondes sismiques, le manteau se comporte comme un corps élastique. Cependant, à l'échelle des temps géologiques (quelques centaines de millions d'années), les roches se comportent comme un fluide visqueux, ce qui permet une circulation globale de la matière à l'échelle de la planète. Ces mouvements de matière, regroupés sous le terme de convection thermique, se caractérisent à la surface de la Terre par la tectonique des plaques, qui elle-même est à l'origine de la formation de structures géologiques comme les failles, les montagnes ou les volcans. La convection thermique du manteau des planètes telluriques est engendrée par les sources de chaleur interne : la chaleur emmagasinée lors de la formation de la planète par l'accrétion de planétésimaux, la décomposition des éléments radioactifs, comme l'uranium ou le thorium piégés lors de l'accrétion, la cristallisation de la graine et les dissipations de marée.

Pour mieux comprendre le phénomène de convection thermique dans les planètes telluriques, il est nécessaire de faire appel à la modélisation numérique. La convection thermique peut être décrite comme la conservation de l'énergie, du moment et de la masse, les équations d'états ainsi que les conditions initiales et limites. Le but de l'étude présentée ici est de développer un outil qui puisse calculer la gravité et la topographie engendrées par des anomalies thermiques dans le manteau convectif d'une planète tellurique. L'aspect véritablement innovant de cette démarche est d'associer les derniers outils de simulation de la convection thermique dans un milieu sphérique 3D avec le calcul de la topographie dynamique de surface et du géoïde par une méthode spectrale, basée sur la décomposition en harmoniques sphériques.

Le manuscrit est divisé en deux parties principales. Dans la première partie, nous introduirons les formulations mathématiques de la topographie et du géoïde puis nous comparerons les caractéristiques géophysiques des planètes telluriques. Par la suite, nous nous intéresserons au cas de Mars à travers l'étude de la topographie et du potentiel de pesanteur. Nous verrons notamment l'importance de la définition du niveau de référence topographique en l'absence d'océan à la surface de la planète. Nous nous intéresserons à Deuteronilus, une paléo-ligne de rivage identifiée récemment à la surface de la planète. Nous calculerons les variations du potentiel de pesanteur le long de ce contact et nous en tirerons les conclusions concernant la variation de la forme de Mars par le passé. Cette étude, associée aux données spectrométriques, nous permettra de proposer un scénario crédible vis-à-vis de l'histoire géologique martienne. Enfin, nous effectuerons une étude de l'hypsométrie de la topographie afin de comparer le cas de Mars à celui des autres planètes telluriques.

Dans la seconde partie, nous aborderons le volet simulation numérique de cette thèse. Nous présenterons tout d'abord les outils développés au cours de ces trois années. Nous verrons les caractéristiques du code de convection thermique, notamment la technique de maillage de la sphère cubique, le solver, les notions de parallélisme et la soumission des travaux aux centres de calcul sollicités. Nous présenterons ensuite le formalisme mathématique du calcul de la topographie dynamique de surface et du géoïde ainsi que la détermination de ces paramètres par la méthode spectrale. Nous introduirons notamment deux nouveaux paramètres sans dimension caractéristiques de notre étude. Cet outil sera ensuite appliqué à des cas représentatifs de la convection thermique (nombre de Rayleigh, contraste de viscosité et chauffage interne), afin de quantifier précisément la contribution des différents paramètres sur les observables géophysiques de surface. Nous verrons enfin les conclusions générales que l'on peut tirer de cette étude ainsi que les perspectives d'application possible dans le futur.



# Chapitre 1

## Les planètes telluriques

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord le formalisme mathématique nécessaire à la description des propriétés topographiques et gravimétriques d'une planète, puis nous présentons les caractéristiques des planètes telluriques.

### 1.1 Rappel mathématique

#### 1.1.1 Définition de la topographie et de la gravité

En l'absence de données sismiques, seuls la gravité, la topographie et le champ magnétique peuvent fournir des informations sur la structure interne d'une planète. Les variations latérales du champ de gravité peuvent être considérées, dans une planète stratifiée, comme la manifestation d'un écart par rapport à un équilibre mécanique (sauf pour la croûte et la lithosphère qui ne sont pas dans un état d'équilibre hydrostatique), qui peut alors être reliée à des processus internes. Quant à la topographie, cet observable fournit une mesure directe de la contribution de la surface au champ de gravité. Associée aux images de la surface, elle témoigne des contraintes présentes dans la lithosphère et par conséquent de la géodynamique régionale et globale. L'analyse des relations entre la topographie et la gravité est donc un outil important dans la détermination des paramètres liés à la formation et à l'histoire d'une planète.

### 1.1.2 Décomposition des données en harmoniques sphériques

#### Topographie

La manière commune de représenter les champs sur une sphère est de les développer en fonctions formant une base orthogonale, appelées harmoniques sphériques. Le principe est de considérer que toute grandeur peut être décomposée selon sa contribution à chaque longueur d'onde, tout en tenant compte de la sphéricité du milieu. La topographie est alors définie de la manière suivante :

$$T(\theta, \phi) = R \left[ 1 + \sum_{l>0} \sum_{m=0}^l [A_{lm} \cos(m\phi) + B_{lm} \sin(m\phi)] P_l^m(\cos\theta) \right] \quad (1.1)$$

où  $R$  est le rayon moyen de la planète,  $\theta$  et  $\phi$  sont la colatitute et la longitude.  $A_{lm}$  et  $B_{lm}$  sont les coefficients d'harmoniques sphériques et  $P_l^m$  les polynômes de Legendre associées de degré  $l$  et d'ordre  $m$ . Les coefficients  $A$  et  $B$  sont calculés à partir d'une transformée en harmonique sphérique (transformée de Legendre sur la latitude, associée à une transformée de Fourier en longitude). Ce type de développement est valable dès lors que les données sont réparties uniformément dans l'espace et suffisamment proches les unes des autres pour limiter les erreurs de troncatures. D'après Neumann *et al.* (2004), une troncature de cette expansion au degré 90 entraîne une erreur de 6,5 km sur les structures de courte longueur d'onde, mais demeure adéquate pour représenter les larges échelles de la topographie, avec une erreur RMS entre l'expansion et la topographie originale de 0,4 km.

#### Gravité

De la même manière que pour la topographie, le potentiel de gravité à l'extérieur d'une planète et à la distance  $r$  du centre de masse est développé en harmoniques sphériques :

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{R_{ref}}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l [C_{lm} \cos(m\phi) + S_{lm} \sin(m\phi)] P_l^m(\cos\theta) \right] \quad (1.2)$$

où  $GM$  est la constante de gravitation multipliée par la masse de la planète,  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont les coordonnées sphériques (distance au centre de masse, colatitute et longitude).

$C_{lm}$  et  $S_{lm}$  sont les coefficients d'harmoniques sphériques et  $P_l^m$  les polynômes de Legendre associées de degré  $l$  et d'ordre  $m$ .  $R_{ref}$  est le rayon de référence (en général le rayon équatorial moyen).

### 1.1.3 Analyse spectrale

Dans cette partie, nous définissons les grandeurs de base qui permettent l'étude de la gravité et de la topographie dans le domaine spectral (cf. Annexe B pour plus de détails). Tout d'abord, la composante spectrale de la topographie, ou énergie, qui permet d'estimer la contribution des différents degrés à la forme générale du spectre :

$$S_l(T, T) = \sum_{m=0}^l (A_{lm}^2 + B_{lm}^2) \quad (1.3)$$

Et de manière similaire, le terme correspondant au potentiel :

$$S_l(U, U) = \sum_{m=0}^l (C_{lm}^2 + S_{lm}^2) \quad (1.4)$$

et la composante spectrale croisée :

$$S_l(T, U) = \sum_{m=0}^l (A_{lm}C_{lm} + B_{lm}S_{lm}) \quad (1.5)$$

La corrélation, qui est une mesure de la relation linéaire entre deux fonctions, ici le potentiel de gravité et la topographie :

$$\gamma_l = \frac{S_l(T, U)}{\sqrt{S_l(T, T)S_l(U, U)}} \quad (1.6)$$

Dans le cas des courtes longueurs d'onde (où les anomalies de gravité sont principalement dues à la topographie), la cohérence doit être proche de 1.

Un moyen utile de quantifier et d'analyser la partie corrélée de la gravité avec la topographie est d'utiliser l'admittance. Si l'on suppose que la gravité  $g_{lm}$  et la topographie  $T_{lm}$  sont reliées par la relation suivante :

$$g_{lm} = Q_{lm}T_{lm} + I_{lm} \quad (1.7)$$

où  $Q_{lm}$  est une fonction de transfert linéaire et  $I_{lm}$  la portion du signal qui n'est pas prédite par le modèle (comme le bruit, par exemple). Si le bruit n'est pas corrélé à la topographie et que la fonction de transfert est indépendante de  $m$ , alors une estimation de  $Q_l$  peut être obtenue en multipliant l'équation précédente par  $T_{lm}$  et en intégrant sur les  $m$  :

$$Z_l = \frac{S_l(U, T)}{S_l(T, T)} \quad (1.8)$$

$Z_l$  est alors l'admittance et correspond à la partie réelle de la composante croisée du spectre gravité/topographie divisée par la composante spectrale de la topographie. Une forte admittance signifie qu'une faible topographie peut engendrer un signal gravitaire important. Dans ce cas, soit la topographie n'est pas compensée, soit elle est compensée mais à grande profondeur. Dans le cas d'une admittance faible, cela signifie que malgré une forte topographie, l'impact est faible sur le signal gravitaire, c'est à dire que la topographie est compensée à faible profondeur.

Maintenant que nous avons décrit les différents outils d'analyse des propriétés topographiques et gravimétriques, nous allons présenter les principales caractéristiques des planètes telluriques que sont la Terre, Vénus et Mars.

## 1.2 La Terre

Malgré de nombreuses études aussi bien continentales qu'océaniques, la topographie de la Terre est, dans un sens, moins bien connue que la topographie des autres planètes telluriques. Cela est principalement dû au fait que les deux tiers de la surface terrestre sont recouverts par les océans et qu'il est relativement coûteux d'entreprendre des études bathymétriques. Par conséquent, il y a encore peu de temps, la topographie des continents présentait des lacunes à courte longueur d'ondes. À l'heure actuelle, le modèle le plus précis de la topographie des terres émergées est celui obtenu par la mission SRTM (Rabus *et al.* (2003)). Durant dix jours, près de 80% des terres entre les latitudes 60° N et 54° S ont été cartographiées, avec une résolution horizontale et verticale respectivement de 30 et 16 m.



### 1.2.1 Topographie et gravité

Pratiquement toute la topographie sur Terre peut être associée aux modèles d’Airy, de Pratt ou d’isostasie thermique et les anomalies de gravité associées aux édifices topographiques sont très faibles. Nous verrons dans le chapitre 2 page 59 une étude hypsométrique de la topographie terrestre.

La topographie dynamique à grandes échelles, de quelques centaines de mètres (Colin et Fleitout (1990); Le Stunff et Ricard (1995)) est dominée par les *superswells* d’Afrique du sud et de Polynésie (Sichoix *et al.* (1998); McNutt (1998)). Dans le cas du bombement africain, Lithgow-Bertelloni et Silver (1998) ont attribué l’altitude élevée du plateau sud-africain (750m), des océans environnants et du plateau africain Est, au support dynamique créé par un panache ascendant issu de la base du manteau. L’absence de topographie dynamique supérieure à quelques centaines de mètres reste une énigme, car les modèles issus de la tomographie sismique et les simulations numériques prédisent une topographie dynamique de l’ordre du kilomètre (Le Stunff et Ricard (1997)).

Les variations géographiques du champ de gravité global de la Terre sont visualisées grâce au géoïde, surface équipotentielle du potentiel de pesanteur qui, en milieu océanique, coïncide avec le niveau moyen de la mer. Les ondulations du géoïde sont dues au phénomène de convection à grande échelle qui anime le manteau terrestre. C’est notamment grâce à l’altimétrie laser que les ondulations du géoïde ont pu être cartographiées précisément (GEOSAT, Topex/Poseidon, Jason). La mesure de ces variations apporte des informations indispensables à la connaissance de la dynamique interne du manteau terrestre, de la structure thermique, de la mécanique des plaques tectoniques et des points chauds. Sur Terre, les anomalies de gravité les plus élevées sont corrélées avec la topographie et les ondulations du géoïde sont d’environ 200 mètres.

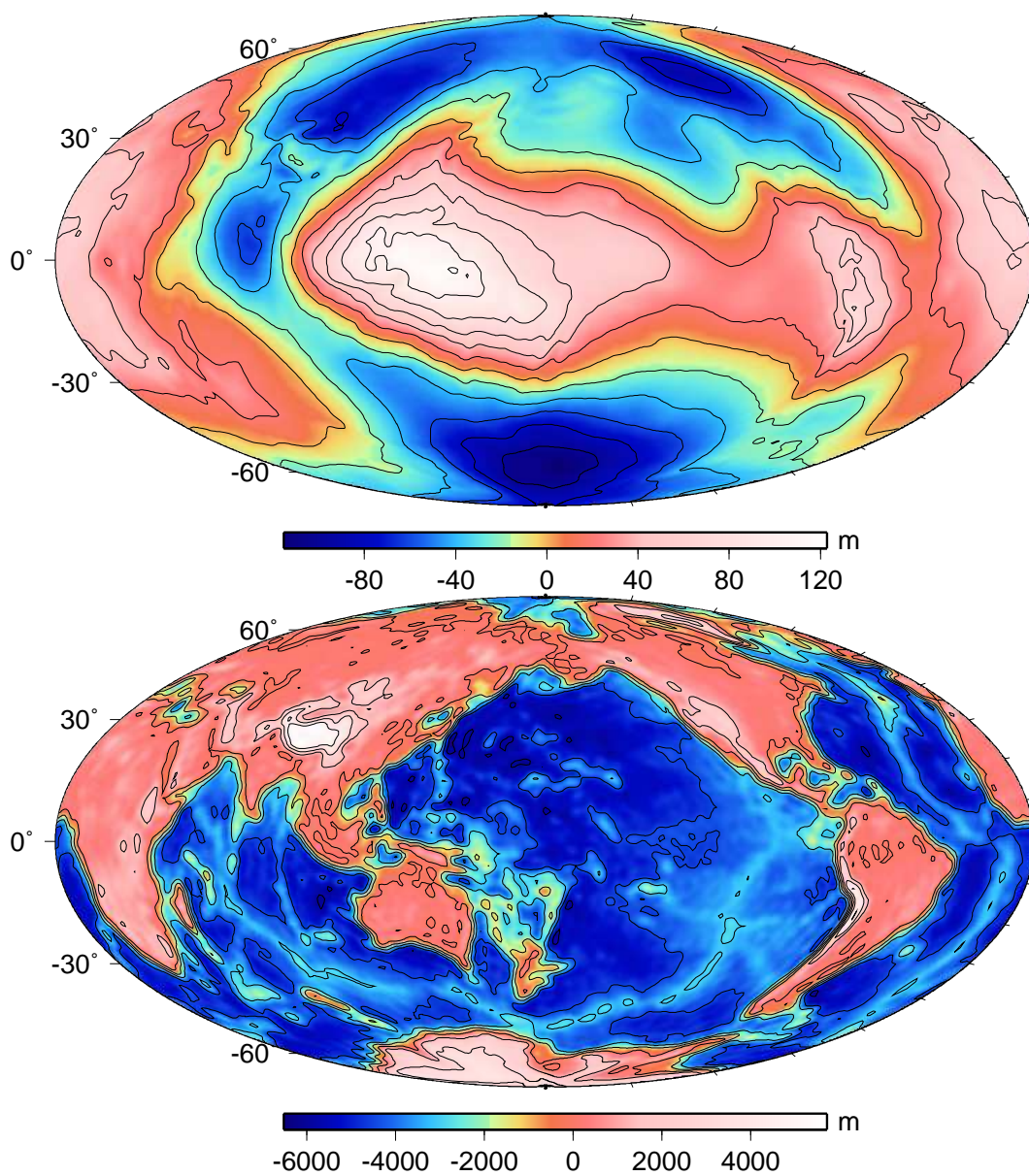


FIG. 1.1 – Géoïde et topographie de la Terre (d'après Wieczorek (2007)).

### 1.2.2 Analyse spectrale de la topographie et de la gravité

Le géoïde terrestre présente de faibles ondulations de quelques dizaines de mètres (figure 1.1), ce qui se traduit par un spectre de puissance inférieur au spectre de puissance de la topographie de cinq ordres de magnitude (figure (1.2)). Les spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et du champ de gravité sont représentés sur la figure (1.3). La corrélation pour la plupart des faibles degrés montre des valeurs faibles et parfois négatives. Au-delà du degré 12, la corrélation présente une valeur quasi-constante d'environ 0,6 mais décroît légèrement à partir du degré 250. Si la topographie de surface était totalement non-compensée, l'admittance aurait une valeur quasi-constante de  $2\pi\rho G$ , soit  $42 \text{ mGal.km}^{-1}$  fois la densité en  $\text{g.cm}^{-3}$  (Wieczorek (2007)). La valeur observée étant plus faible, cela signifie que la topographie et la gravité ne sont pas parfaitement corrélées à l'échelle globale.

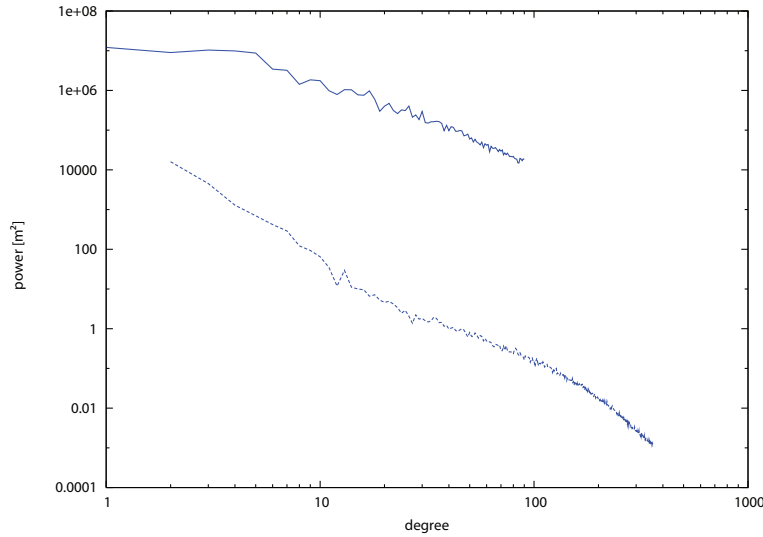


FIG. 1.2 – *Spectre de puissance de la topographie (trait plein) et du géoïde (pointillés) de la Terre.*

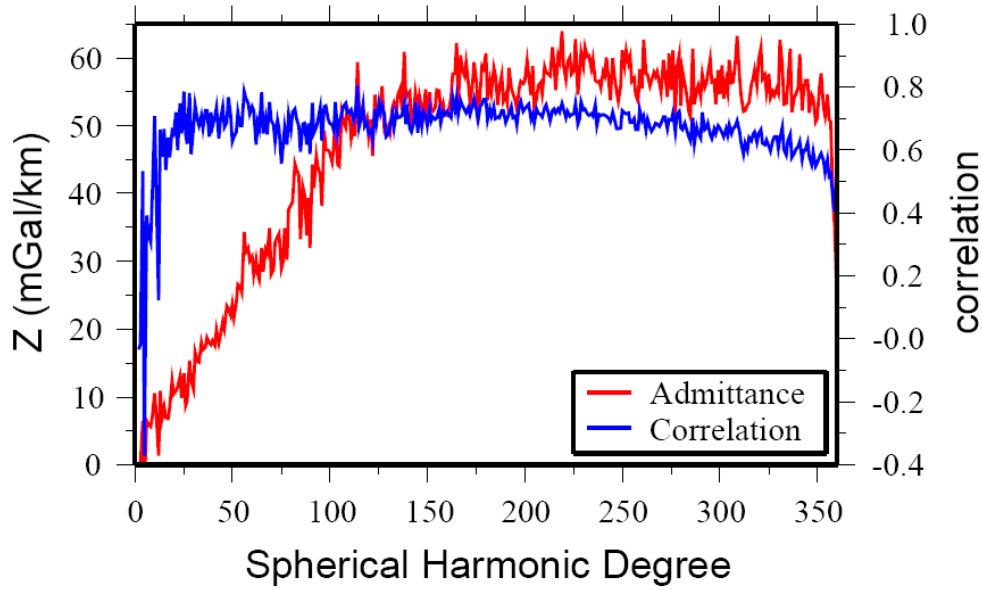


FIG. 1.3 – Spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et de la gravité de la Terre (figure extraite de Wiczorek (2007)).

### 1.2.3 Dynamique interne

La théorie de la convection thermique dans les années soixante a fourni une explication du fort gradient thermique proche de la surface, qui est une manifestation des couches limites thermiques associées à la convection mantellique. Deux régimes thermiques différents peuvent être distingués (Jeanloz et Morris (1986)) :

- les couches limites thermiques, où le transfert advectif est inférieur ou égal au transfert conductif, comme la lithosphère océanique ou continentale (ce qui représente moins de 2% du volume terrestre). Les couches limites peuvent également être d'origine chimique ou compositionnelle, comme dans le cas de la couche D'' à la base du manteau.

- sous les couches limites, où le transport de chaleur principalement advectif se caractérise par des mouvements verticaux susceptibles d'être à l'origine des *superswells* d'Afrique du sud et de Polynésie (Sichoix *et al.* (1998); McNutt (1998)). La quasi totalité du manteau inférieur peut être classée dans cette catégorie, comme le manteau supérieur sous la lithosphère et des portions de la zone de transition.

## 1.3 Vénus

En terme de taille, de masse et de densité, Vénus est une planète voisine de la Terre. La mission Magellan a fourni une quantité importante de données concernant la tectonique et le volcanisme vénusien (Solomon *et al.* (1992); Nimmo et McKenzie (1998)). Les images radar de la surface sont complétées par les données topographiques et gravimétriques. Cependant, cette planète ne présente aucune trace d'une tectonique des plaques comme sur Terre, ce qui semble indiquer que la convection mantellique a été différente de celle de notre planète.

### 1.3.1 Topographie et gravité

La cartographie de la surface de Vénus par radar, réalisée à partir de 1990 par la sonde Magellan (figure (1.4)), a mis en évidence un relief volcanique extraordinaire : pas de dorsales océaniques ni de plaques tectoniques, mais des zones de rift et des provinces volcaniques de type point chaud (Arvidson *et al.* (1991); Campbell *et al.* (1992); Ford et Pettengill (1992)). La surface présente une caractéristique unimodale et près de 80% se trouve à  $\pm 1$  km du rayon moyen de la planète. L'unimodalité est caractéristique des planètes telluriques du système solaire (cf. chapitre 2), sauf pour la Terre où la topographie est bimodale, partagée entre les continents (+200 m) et le plancher océanique (-3500 m). De nombreux édifices volcaniques parsèment la surface, des petits cônes comparables aux volcans sous-marins terrestres jusqu'aux boucliers géants de plus de 500 km de diamètre, ainsi que des structures circulaires originales nommées *coronae* qui témoignent d'un processus magmatique spécifique à la planète. L'épaisse atmosphère de Vénus a longtemps empêché l'observation directe de sa surface. Il a fallu attendre les données radars des observations terrestres et des missions Pioneer, Venera 15-16 et Magellan pour obtenir une vue précise de la surface. Ces images, complétées par les données de topographie et de gravité (figure (1.5)), montrent en fait que Vénus est bien différente de la Terre. Sur Terre, la tectonique des plaques se traduit par la présence de rides et de fossés. Bien que l'on retrouve des traces d'activité



FIG. 1.4 – Vue radar de la surface de Vénus par la sonde Magellan.

géologique à la surface de Vénus, leur origine n'est pas due à une tectonique des plaques globale mais à une activité géologique régionale. Par ailleurs, une importante différence entre les deux planètes réside dans la température de surface. Sur Vénus, l'atmosphère épaisse composée à plus de 95% de  $CO_2$ , est responsable d'un effet de serre qui provoque une température de  $475^{\circ}C$  à la surface (Seiff (1983)).

L'épaisseur de la lithosphère de Vénus peut être estimée si l'on fait trois hypothèses (Schubert *et al.* (2001)) :

- le chauffage radioactif, dû à la présence d'uranium, de thorium et de potassium est sensiblement identique au chauffage radioactif terrestre.
- les températures moyennes des manteaux des deux planètes sont égales.
- la perte de chaleur en surface a une dépendance temporelle négligeable et la production de chaleur par la croûte est faible.

Avec ces hypothèses, la lithosphère de la planète devrait avoir une épaisseur égale à 60% de celle de la lithosphère terrestre, soit 40 km, du fait d'une température de surface plus élevée (Schubert *et al.* (2001)). La conséquence d'une lithosphère mince et chaude, est qu'elle est trop faible pour supporter une forte topographie et les larges anomalies de gravité associées. Cependant, les données topographiques et gravimétriques de



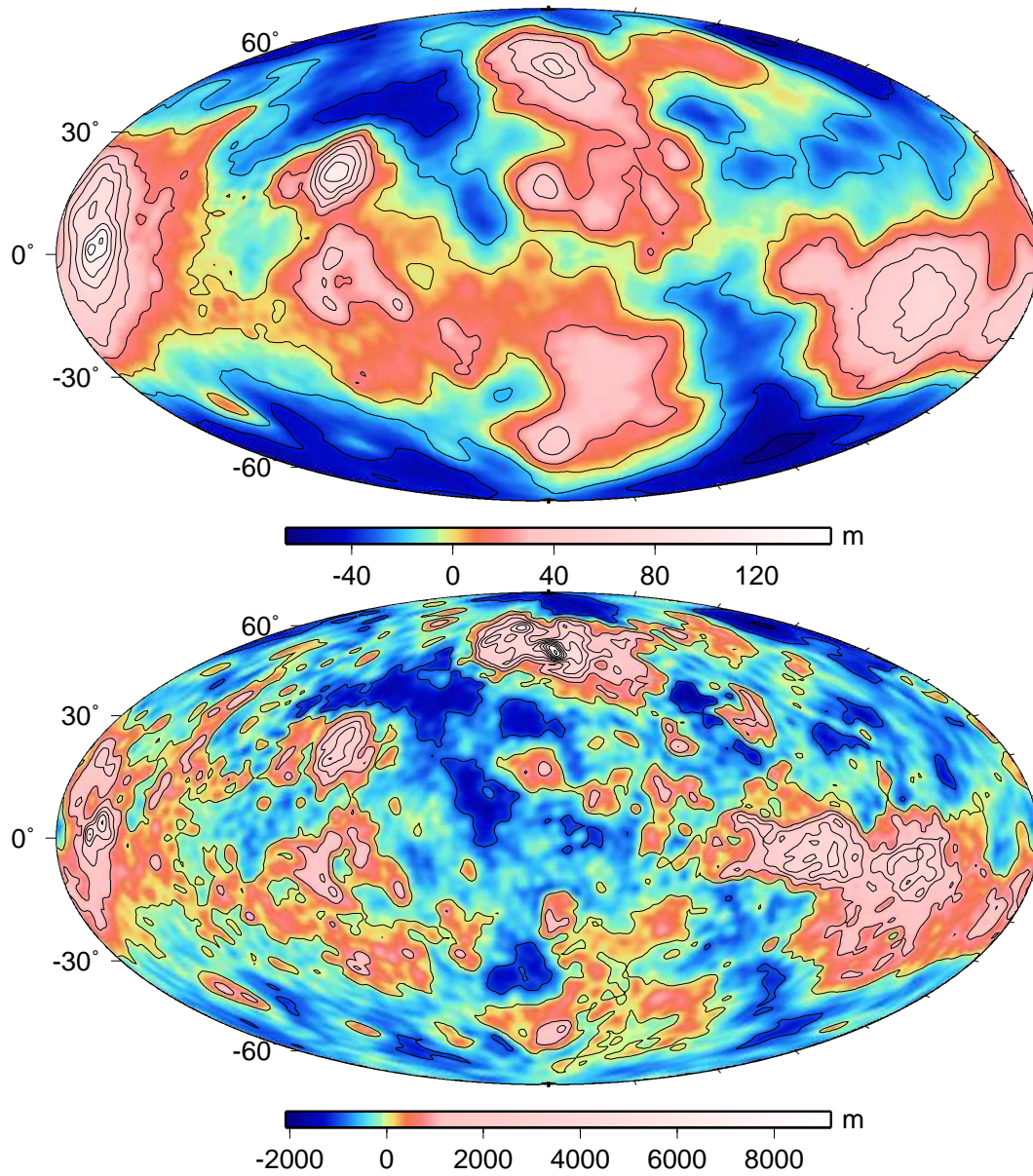


FIG. 1.5 – Géoïde et topographie de Vénus (d'après Wieczorek (2007)).

la sonde Pioneer montrent une totale incompatibilité avec ces trois hypothèses. Bien que la topographie moyenne de la surface de Vénus soit inférieure d'un facteur 4 à la topographie terrestre, les altitudes maximales sont quasiment égales (Pettengill *et al.* (1980); Bills et Kobrick (1985); Turcotte (1987); Ford et Pettengill (1992)).

Deux modèles ont été proposés pour expliquer la forte topographie de Vénus. Le premier fait appel à une topographie compensée comme dans le cas de la Terre, où la haute topographie est expliquée par l'isostasie d'Airy. Avec une lithosphère fine et chaude, comme dans le cas de Vénus, l'épaississement crustal serait limité. Une lithosphère fine implique des surfaces de compensation peu profondes, incompatibles avec les observations.

Ces difficultés amènent au second modèle en relation avec le support dynamique de la topographie (Phillips (1990); Bindschadler *et al.* (1992)). Ce modèle est basé sur l'interaction dynamique avec la convection mantellique pour la génération de la topographie et des anomalies de gravité associées. Les terrains équatoriaux élevés sont généralement associés à des panaches ascendants (Morgan et Phillips (1983); Herrick et Phillips (1990); Phillips *et al.* (1991)). De plus, la quasi absence de relaxation de la topographie associée aux cratères d'impact requiert une lithosphère élastique épaisse (Grimm et Solomon (1988)). Ces observations semblent donc écarter l'hypothèse d'une lithosphère fine à l'équilibre dominée par la topographie dynamique et les anomalies du géoïde associées.



Les données obtenues par les sondes Pioneer et Magellan ont montré que, contrairement au cas de la Terre, les anomalies de gravité sur Vénus sont fortement corrélées à la topographie (Konopliv et Sjogren (1994)). Par ailleurs, l'admittance est élevée (cf. figure (1.8)) et les profondeurs de compensation sont importantes. Les grandes anomalies positives sont associées à Beta Regio (complexe volcanique) et à la partie Est d'Aphrodite Terra (Esposito *et al.* (1982); Herrick *et al.* (1989)). Ces formations sont au moins compensées à 75%, mais les anomalies de gravité associées sont largement supérieures comparées aux anomalies terrestres. En se basant sur le modèle d'Airy, la partie Est d'Aphrodite Terra présente une profondeur de compensation de 230 km (Herrick *et al.* (1989)) et Ishtar Terra, une profondeur de 150 km (Sjogren *et al.* (1984)). Comme dans le cas de la Terre, le géoïde de Vénus présente des ondulations d'environ 200 mètres. Les anomalies les plus importantes correspondent aux édifices volcaniques d'Atla et de Bera Regio, et aux portions continentales d'Aphrodite et de Ishtar Terra. Ces anomalies ont été directement reliées aux contraintes lithosphériques (Sandwell *et al.* (1997)). Il est à remarquer que les plaines présentant les plus faibles élévations sont associée à des anomalies du géoïde négatives.

### 1.3.2 Analyse spectrale de la topographie et de la gravité

Les spectres de puissance de la topographie de Vénus (GTDR3.2) (Rappaport *et al.* (1999)) et du géoïde (MGNP180U) (Konopliv *et al.* (1999)) sont représentés sur les figures (1.6) et (1.7). Ceux-ci sont similaires aux spectres de la Terre, mis à part que l'amplitude des termes du premier et second degré de la topographie de Vénus sont plus petits. Le changement de pente à partir du degré 100 a été mis en évidence par Rappaport *et al.* (1999) grâce au spectre de la rms de la topographie. D'après Wiczorek (2007), ce changement de pente serait dû soit à une imprécision dans l'algorithme des transformées en harmoniques sphériques, soit aux artéfacts liés à la méthode de remplissage des données manquantes. De plus, l'erreur associée au géoïde est supérieure au géoïde lui même au-delà du degré 65 (Wiczorek (2007)).

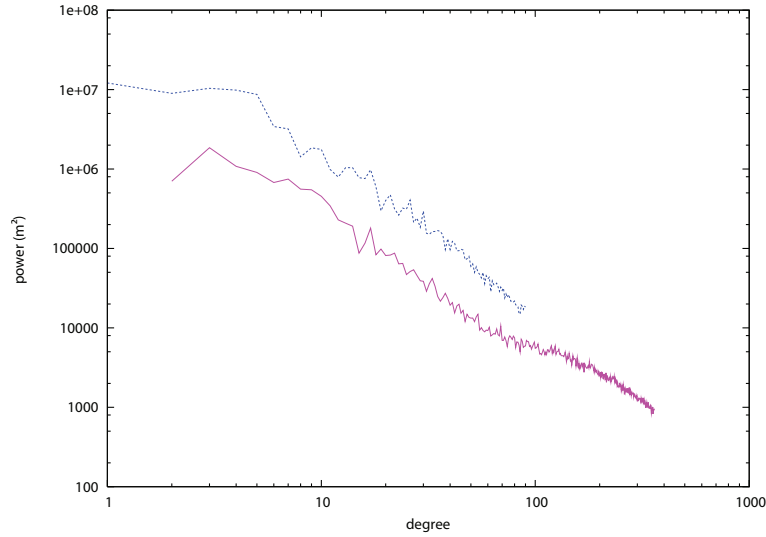


FIG. 1.6 – *Spectre de puissance de la topographie de Vénus. En pointillés : le spectre terrestre correspondant.*

Les spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et du champ de gravité représentés sur la figure (1.8), diffèrent radicalement des spectres terrestres respectifs. L'admittance présente des valeurs entre 30 et 50  $mGal.km^{-1}$  jusqu'au degré 100, alors que pour la Terre, l'admittance croît régulièrement de 0 à 30  $mGal.km^{-1}$  jusqu'au degré 100.

La corrélation entre les champs de gravité et de topographie est également supérieure à la corrélation terrestre pour les degrés inférieurs à 40. Cependant, au-delà du degré 60, la corrélation et l'admittance diminuent linéairement à mesure que les degrés augmentent, ce qui, d'après Wieczorek (2007), serait dû à la mauvaise détermination des coefficients du potentiel global.

En considérant seulement ces coefficients où  $l - |m| < 20$ , Konopliv *et al.* (1999) ont montré que l'admittance et la corrélation sont considérablement supérieures à celles dans le cas où tous les coefficients sont considérés. En particulier, la corrélation reste proche de 0,7 pour les degrés jusqu'à 140.

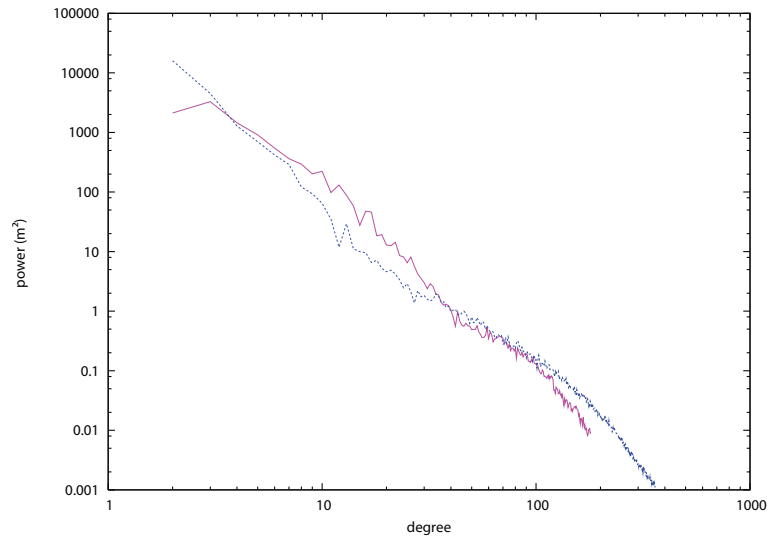


FIG. 1.7 – *Spectre de puissance du géoïde de Vénus. En pointillés : le spectre terrestre correspondant.*

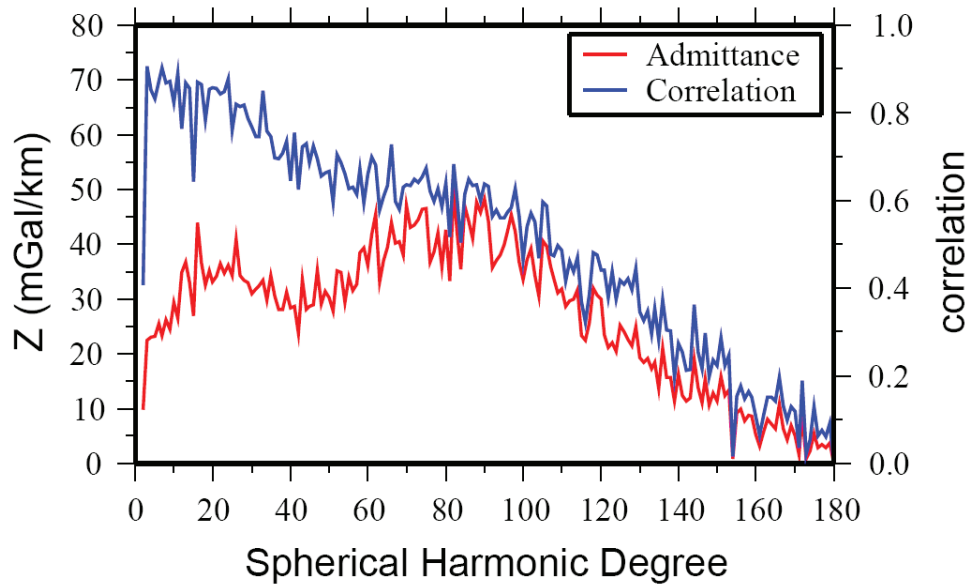


FIG. 1.8 – *Spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et de la gravité de Vénus (figure extraite de Wieczorek (2007)).*

## 1.4 Mars

Mars est une planète dont le rayon est deux fois plus petit que celui de la Terre et sa surface est caractérisée par des volcans dont la taille dépasse celle des volcans terrestres, un gigantesque canyon comparable au rift Est africain, des réseaux de chenaux complexes, des îles, des dunes, des calottes polaires (figure (1.9)). Les premières photos détaillées de la surface martienne ont été obtenues lors des survols des sondes Mariner 4 en 1965 et Mariner 6-7 en 1969. Ces photographies ont révélé une surface très cratérisée, ressemblant fortement à celle de la Lune. Cependant, les images de la sonde Mariner 9 en 1971 ont montré que les précédentes missions n'avaient imagé qu'un seul type de terrain alors que la planète présente une diversité géologique importante. En 1976, les deux missions Viking 1 et 2 vont fournir plus de cinquante mille images de la planète, couvrant ainsi plus de 97% de la surface avec une résolution inférieure à 300m. Plus récemment, en 1996, la sonde Mars Global Surveyor a produit des images encore plus précises, dont certaines atteignent une résolution de 1 mètre par pixel. Toutes ces missions ont permis de dresser une carte détaillée de la surface de Mars.

### 1.4.1 Topographie et gravité

La structure la plus importante sur Mars est la dichotomie qui sépare les deux hémisphères de la planète (figure (1.10)). Les terrains du sud dont l'altitude moyenne varie entre 3 et 6 km, sont densément cratérisés alors que l'hémisphère nord, d'altitude plus faible (3 km en dessous du rayon moyen de la planète) est composé de plaines lisses. Le fait que cette région soit très peu cratérisée suggère un récent renouvellement de la surface et donc un âge plus jeune. L'hémisphère Sud est probablement l'image originelle de la surface de Mars après la phase d'accrétion de la planète alors que l'hémisphère Nord semble être d'origine volcanique et sédimentaire.

La seconde particularité est le gigantesque complexe volcanique de Tharsis qui s'étale sur plus de 5000 km et s'élève en moyenne à 10 km d'altitude. Situé de part et d'autre de l'équateur, il regroupe les principaux volcans de la planète que sont Ascræus,

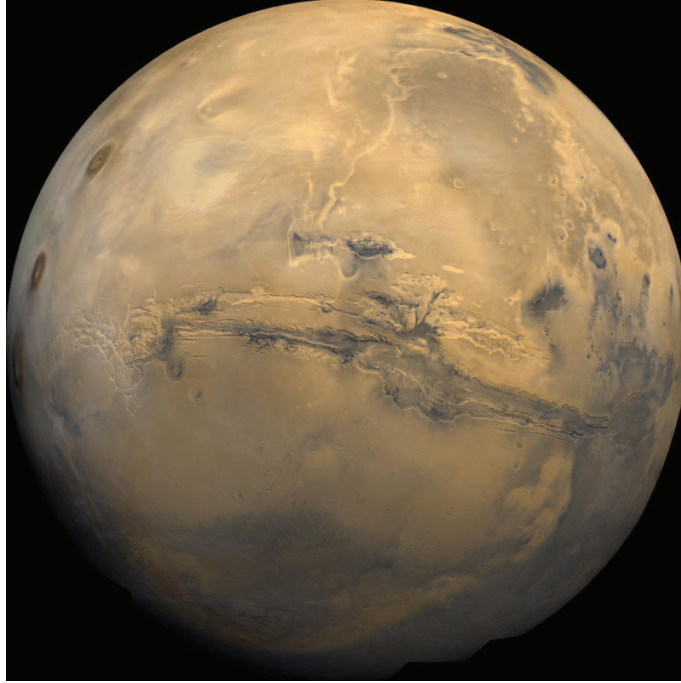


FIG. 1.9 – Vue globale de Mars reconstituée à partir des images Viking.

Pavonis, Arsia et Olympus Mons. Cette région est en partie responsable de la forme particulière du géoïde de la planète (figure (1.10)).

Le dernier trait marquant de la surface martienne est le canyon Valles Marineris, long de 4000 km, large de 300 km et d'une profondeur pouvant atteindre 10 km. Un certain nombre de modèles mathématiques basés sur les harmoniques sphériques ont été développés grâce aux données Mariner, Viking et MGS (Smith *et al.* (1999a); Lemoine *et al.* (2001); Yuan *et al.* (2001)). Le dernier modèle en date atteint le degré 95 (Konopliv *et al.* (2006)).

La figure (1.11) représente l'anomalie de gravité à l'air libre, autrement dit les différences de gravité entre la valeur théorique du champ de gravité et la valeur mesurée, corrigée de l'altitude. La valeur moyenne sur Mars est de 100 mGal, mais certaines régions présentent de fortes anomalies supérieures à 400 mGal, comme Tharsis, Elysium ou Isidis. La valeur la plus forte correspond à Tharsis (plus de 3000 mGal).

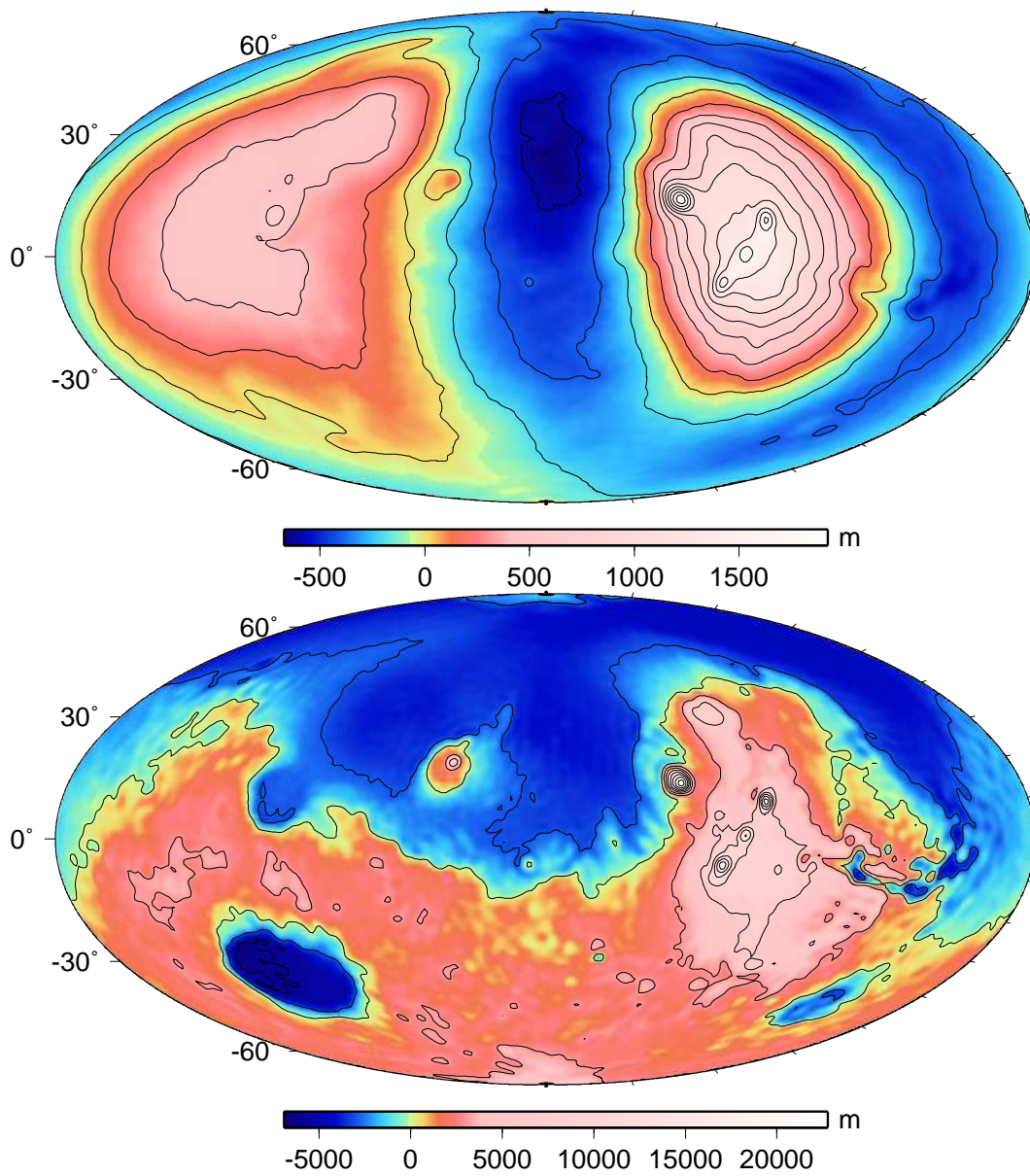


FIG. 1.10 – Géoïde et topographie de Mars (d'après Wieczorek (2007)).

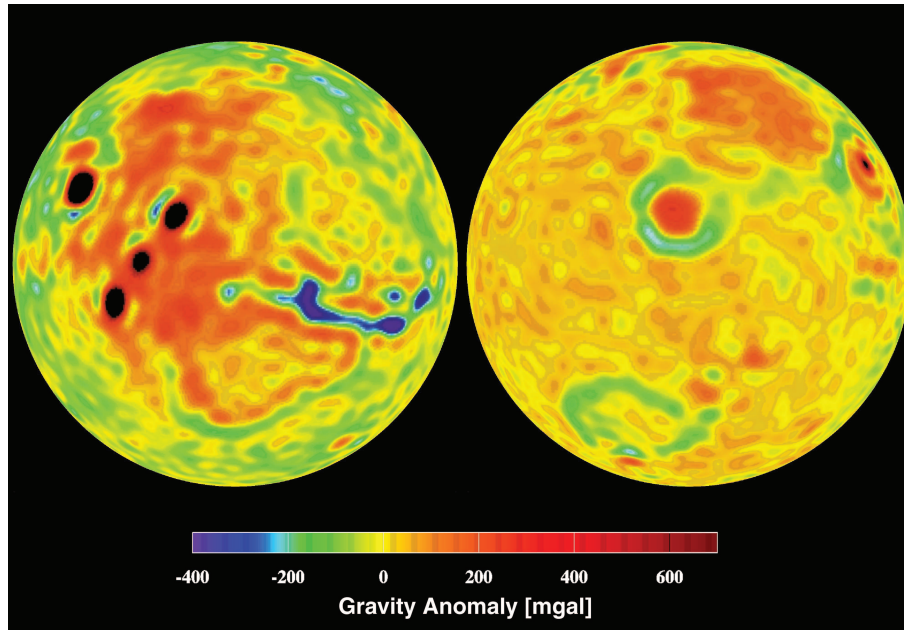


FIG. 1.11 – *Gravité à l'air libre de Mars (modèle jgm85).*

Les deux hémisphères semblent répondre différemment aux impacts ainsi qu'aux processus volcaniques (Smith *et al.* (1999b)). Le sud, qui présente une topographie très irrégulière, présente un signal de gravité relativement lisse, qui est interprété comme une compensation isostatique d'une surface ancienne. Le Nord, quant à lui, présente des anomalies de gravité qui ne sont pas en accord avec sa topographie régulière. D'après ces auteurs, la différence entre les anomalies de gravité du Sud et du Nord (160 mGal) pourrait être associée à la dichotomie observée sur la topographie et à une variation de l'épaisseur crustale avec la latitude (Zuber *et al.* (2000)).

Les bassins d'impact de l'hémisphère Sud présentent une forte anomalie circulaire négative et une anomalie positive au centre (mis à part Hellas). L'anomalie centrale est probablement liée au soulèvement du manteau par réajustement isostatique et l'anomalie négative circulaire serait due à la contribution de deux phénomènes que sont l'épaississement de la croûte à la suite de l'impact et la déflexion de la lithosphère en réponse à la charge .



En considérant que le signal de gravité est dû entièrement aux variations d'épaisseur crustale (dont la densité est supposée homogène), Zuber *et al.* (2000) ont pu contraindre la valeur minimale de l'épaisseur moyenne de la croûte. Le principe est d'expliquer l'anomalie de Bouguer en faisant varier le relief à la base de la croûte. La seule contrainte est de fixer localement l'épaisseur à une valeur proche de zéro (dans cette étude, le cratère Hellas), car aucune mesure directe de cette épaisseur n'est encore disponible. Leur étude amène donc à une valeur moyenne de 43,5 km, avec une valeur minimale de 3 km sous Isidis Planitia et une épaisseur maximale de 92 km sous Syria Planum. La tendance globale montre un amincissement de la croûte en remontant vers le Nord : une croûte épaisse sous les vieux volcans comme Alba Patera et plus fine sous les jeunes complexes volcaniques comme Tharsis.

Neumann *et al.* (2004) ont présenté récemment un modèle plus précis, basé sur les derniers modèles de gravité et une prise en compte plus fine de la densité de la croûte. En tenant compte d'une densité plus forte pour les volcans de Tharsis et de la présence des calottes polaires de faible densité, leur modèle prédit une épaisseur de croûte variant de 5 à 100 km.

Le géoïde martien présente les plus fortes ondulations, avec un maximum de 2,5 km. Le signal est symétrique et centré sur Tharsis et entouré par un minimum annulaire. D'autres maxima sont associées aux bassins d'impact Isidis et Utopia, ainsi qu'au volcan Elysium. Deux modèles ont été proposés pour expliquer la topographie et le champ de gravité de Tharsis, l'un basé sur l'origine volcanique du complexe, l'autre basé sur l'origine mantellique de la structure. Bien que ces deux modèles reproduisent correctement la topographie de la région de Tharsis, ils impliquent des conséquences différentes pour le manteau martien, la structure de la croûte et l'évolution thermique de la planète.



### Modèles de formation du dôme de Tharsis

D'après le premier modèle, le dôme de Tharsis serait d'origine volcanique et constitué d'intrusions magmatiques (Solomon et Head (1982)). Ce modèle stipule implicitement que la contribution du manteau à la topographie et à la gravité est secondaire. Cependant, il n'explique pas l'origine des sources de chaleur responsables de la nature volcanique de Tharsis.

Dans le second modèle, le champ de gravité et la topographie de la région de Tharsis sont la conséquence de la remontée d'un plume mantellique sous Tharsis (Weinstein (1995), Harder et Christensen (1996)). Le modèle repose sur l'hypothèse selon laquelle les anomalies de gravité à grandes longueurs d'ondes ( $l \leq 4$ ) proviennent majoritairement du manteau et que le volcanisme du dôme de Tharsis nécessite des sources de chaleur profondes. Un tel modèle a été validé par plusieurs études, aussi bien d'un point de vue tectonique (Mège et Masson (1996)), que d'un point de vue convectif (Harder et Christensen (1996), Harder (2000)). D'autres modèles de convection prenant en compte les changements de phases minéralogiques (ex. spinel à perovskite), ont montré qu'une convection à plume unique serait possible dans le manteau martien (Weinstein (1995), Harder et Christensen (1996)). Cette structure permettrait d'expliquer l'existence d'une source de chaleur profonde à la verticale du dôme de Tharsis, mais également l'aspect de la topographie et l'anomalie de l'aréioïde dans la région (Harder (2000)). Ce modèle suggère que le noyau de la planète ait pu se refroidir rapidement, ce qui implique des conséquences non négligeables concernant la nature de la dynamo et l'histoire du champ magnétique de la planète. Ce modèle est toutefois soumis à certaines critiques : les dernières études sur le sujet montrent en effet qu'un tel modèle n'explique que 15% de l'aréioïde régional et 25% de la topographie du complexe volcanique (Zhong et Roberts (2003)). En effet, jusqu'à récemment, les modèles proposés pour expliquer l'origine profonde de Tharsis ne prenaient pas en compte la nature de la lithosphère (Harder et Christensen (1996), Harder (2000)). Or, des études telles que celle de Zhong (2002), prenant en compte la nature élastique de la lithosphère, ont montré que le

signal gravimétrique d'un plume (à grande longueur d'onde;  $l=2$ ), peut être réduit d'un facteur 3, résultat en accord avec d'autres études basées sur la modélisation de la topographie/gravimétrie de jeunes volcans (McGovern *et al.* (2002)).

Une troisième hypothèse suggère que l'anomalie thermique pourrait être due à un impact géant (Reese *et al.* (2002)). L'anomalie de l'aréoïde présente en effet une forme circulaire que l'on ne retrouve pas sur les cartes de topographie et de gravité. Cependant, il n'existe pas d'arguments géophysiques permettant de mettre en évidence une telle zone d'impact dans la région de Tharsis (Zuber *et al.* (2000)). Mais certains modèles de formation affirment que peu de temps après s'être formée, Mars aurait subi des impacts conséquents, qui auraient pu modifier les conditions thermiques initiales de la planète. Il paraît cependant difficile d'imaginer qu'un impact puisse plutôt donner naissance à un édifice volcanique qu'à un "mega-bassin". Mais la physique des impacts géants est encore aujourd'hui mal connue, ce qui permet d'imaginer de nombreux scénarios pour expliquer la présence du dôme de Tharsis.

### 1.4.2 Analyse spectrale de la topographie et de la gravité

Les spectres de la topographie de Mars et du géoïde issus du modèles JGM95J01 sont représentés sur les figures (1.12) et (1.13). Le géoïde martien est supérieur d'un ordre 2 aux spectres de topographie de la Terre et de Vénus. D'après Wieczorek (2007), les premiers cinq degrés du géoïde martien sont très supérieurs aux valeurs attendues basées sur l'extrapolation des termes de degrés supérieurs. Ce signal est une conséquence de la charge lithosphérique et de la déflexion associée à la région de Tharsis (Zuber et Smith (1997); Phillips *et al.* (2001)).

L'admittance et la corrélation de la topographie et du champ de gravité sont représentées sur la figure (1.14). L'admittance croît régulièrement jusqu'à atteindre un palier au-delà du degré 30. Au-delà du degré 65, l'admittance ainsi que la corrélation diminuent, ce qui traduit la faible résolution du champ de gravité (Wieczorek (2007)). Alors que la forme de l'admittance est similaire à celle de l'admittance terrestre, l'am-

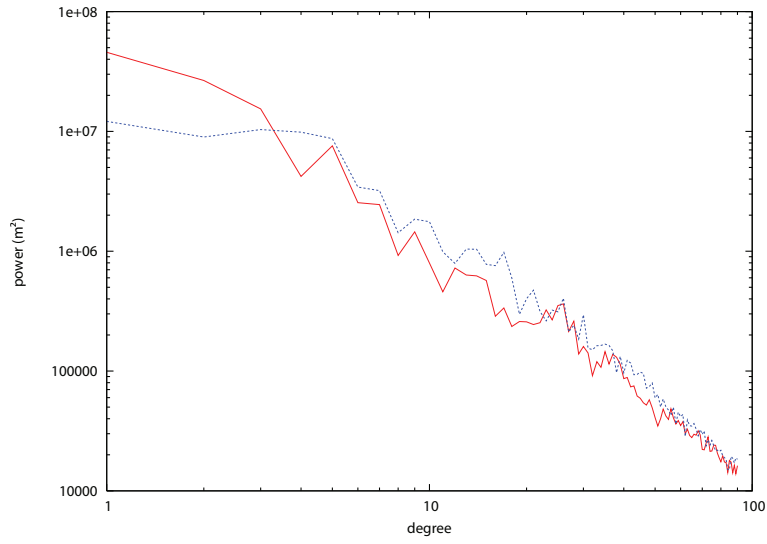


FIG. 1.12 – *Spectre de puissance de la topographie de Mars. En pointillés : le spectre terrestre correspondant.*

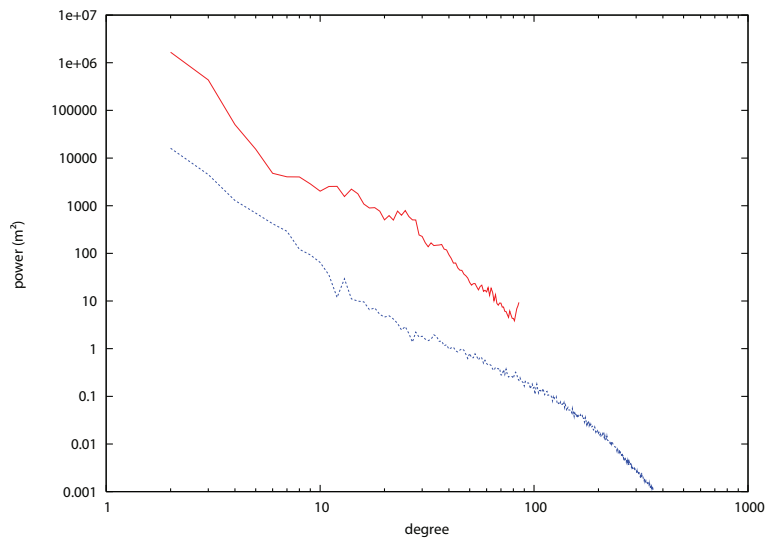


FIG. 1.13 – *Spectre de puissance du géoïde de Mars. En pointillés : le spectre terrestre correspondant.*

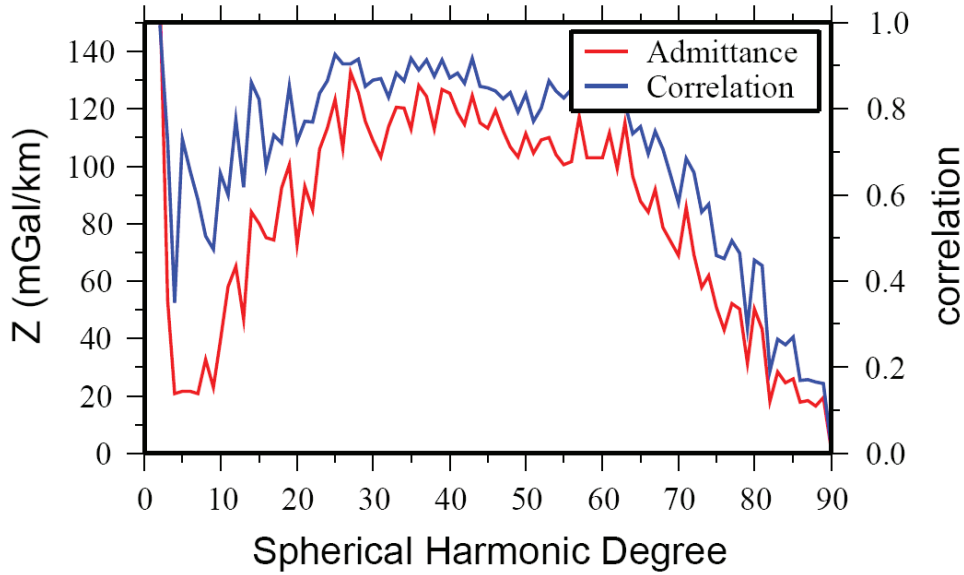


FIG. 1.14 – Spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et de la gravité de Mars (figure extraite de Wieczorek (2007)).

plitude est largement supérieure pour les degrés élevés (100 au lieu de  $35 \text{ mGal.km}^{-1}$ ). Ces valeurs sont comparables à ce que l'on pourrait attendre dans le cas d'une topographie non compensée (Wieczorek (2007)).

La corrélation entre la gravité et la topographie est également élevée, avec des valeurs entre 0,6 et 0,8. Le fait que la corrélation sur Mars soit très forte à toutes les longueurs d'ondes (contrairement au cas de la Terre aux grandes échelles) implique une forte relation entre les variations de densité, sources des anomalies gravimétriques et les processus de formation de la topographie.

Comme dans le cas de Vénus, les termes gravitaires sectoriels ( $m=l$ ) sont mieux déterminés du fait de l'orbite quasi-polaire de MGS (Wieczorek (2007)). Lorsque seuls ces termes sectoriels sont utilisés, la corrélation est encore plus forte que dans le cas présent (Yuan *et al.* (2001)).

## 1.5 Conclusions du chapitre

Les données spatiales ont permis d'améliorer nettement les modèles topographiques et gravimétriques des planètes telluriques. Aujourd'hui, les derniers modèles gravimétriques de Mars sont développés jusqu'au degré 95 (MGS95J, Konopliv *et al.* (2006)) et les futures missions permettront d'améliorer encore la précision des modèles. L'amélioration des méthodes d'analyse des données géophysiques est également à mentionner. Les premières études étaient réalisées en 1D, à partir de simples profils gravimétriques. L'étude des petits corps a permis de démontrer la supériorité des méthodes d'analyse sphérique par rapport aux méthodes cartésiennes classiques.

Il reste néanmoins de nombreuses améliorations à apporter aux modèles existant, comme la prise en compte de la nature élasto-visco-plastique de la lithosphère qui nécessite un temps de calcul élevé et qui est difficilement implémentable dans une inversion utilisant la topographie et la gravité comme paramètres.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser de plus près aux données topographiques et gravimétriques martiennes. Nous allons entre autre voir comment l'on peut déterminer le niveau de référence topographique de la planète. Nous étudierons ensuite les variations du potentiel de pesanteur d'une ligne de rivage et nous nous intéresserons aux variations de la forme de Mars par le passé.



# Chapitre 2

## Potentiel de pesanteur et hypsométrie de Mars

Les tout premiers modèles de topographie et de gravité martienne ont pu être élaborés dans les années 1970 grâce aux missions Viking, mais les plus grands progrès concernant la connaissance de Mars ont été réalisés récemment, grâce à la mission Mars Global Surveyor, lancée en 1996. Que ce soit au niveau de l'imagerie de surface, du champ magnétique ou de la gravité martienne, jamais des données aussi précises n'avaient été récoltées. Ce sont ces jeux de données que nous allons utiliser dans la suite de ce chapitre pour l'étude du potentiel de pesanteur et de l'hypsométrie de Mars.

### 2.1 Forme de Mars

#### 2.1.1 Le niveau zéro ou comment définir l'aréoïde

L'aréoïde est à Mars ce que le géoïde est à la Terre, c'est à dire la surface d'isovaleur du potentiel de pesanteur. Sur Terre, cette surface est confondue avec le niveau moyen des océans. Sur Mars, il est impossible de déterminer l'aréoïde de cette manière du fait de l'absence d'océan. La méthode consiste à choisir le potentiel de référence tel que l'écart entre le rayon de la planète (figure (2.1)) et le rayon de l'aréoïde que l'on

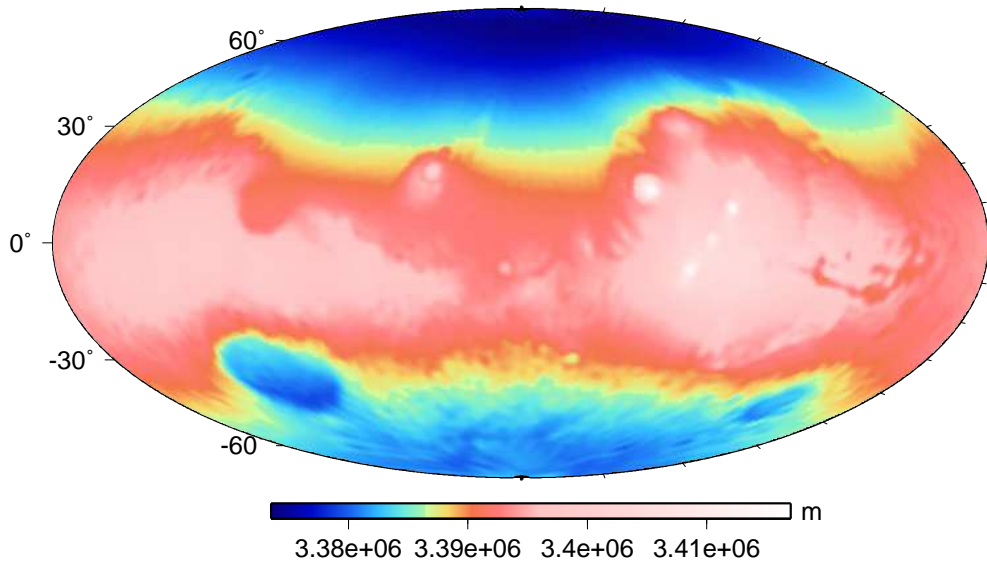


FIG. 2.1 – Rayon au centre de masse de Mars.

détermine soit minimal. Une fois cette surface déterminée, la topographie s'obtient en calculant l'écart entre le rayon au centre de masse et cette surface de référence. Dans leur article, Smith *et al.* (2001) définissent le niveau de référence comme la surface équipotentielle (gravitationnelle plus rotationnelle) dont la valeur moyenne à l'équateur est égale au rayon moyen déterminé par l'altimètre laser MOLA de la Sonde MGS, soit  $3389508 \pm 3$  m. Il semble étonnant que cette surface soit déterminée à partir de sa valeur moyenne à l'équateur et non par rapport à sa valeur moyenne sur toute la planète. Nous avons donc recalculé l'aréoïde martien de telle manière que son rayon moyen intégré sur toute la surface martienne (et non plus seulement sur l'équateur) corresponde au rayon martien moyen mesuré par MOLA (figure (2.2)). Chaque valeur déterminée a bien entendu été pondérée par son élément de surface associé. Les potentiels de référence ainsi obtenus sont regroupés dans le tableau (2.1). La différence entre les deux potentiels atteint  $2680 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ , soit près de 720 mètres pour la topographie.

La forme de l'aréoïde est proche de celle d'un ellipsoïde tri-axial (figure (2.2)). Dans la section suivante, nous allons voir comment définir les paramètres de cet ellipsoïde.



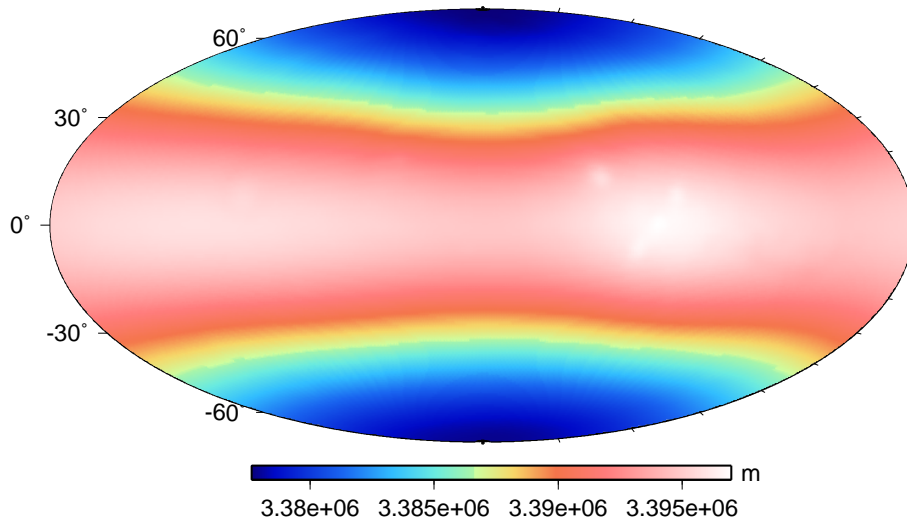


FIG. 2.2 – Aréoïde recalculé par la méthode définie dans la section 2.1.1.

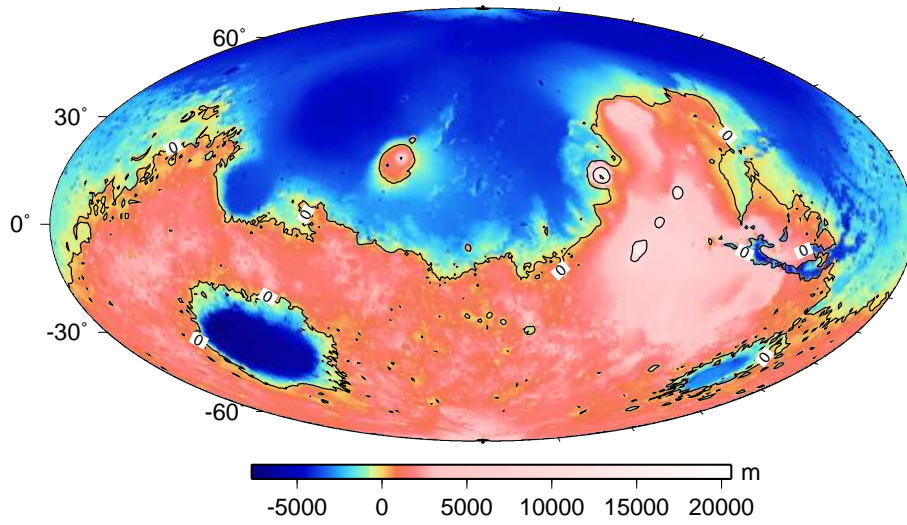


FIG. 2.3 – Topographie de Mars déterminée à partir de l'aréoïde représenté sur la figure 2.2.

$U_{eq} (m^2.s^{-2})$	12652137
$U_S (m^2.s^{-2})$	12654815

TAB. 2.1 – Potentiels de référence pour la détermination de l'aréoïde martien.

### 2.1.2 Ellipsoïde tri-axial

Mars présente un renflement équatorial du fait de l'existence du complexe volcanique de Tharsis. Si l'on veut représenter plus précisément la forme de Mars, il est donc important de prendre en compte ce renflement équatorial. Cela est possible en ajoutant un second axe équatorial, afin d'obtenir un ellipsoïde tri-axial. Cette forme géométrique est définie par un demi-grand-axe  $a$ , un demi-moyen-axe  $b$ , un demi-petit-axe  $c$ , un aplatissement polaire  $f_p$  et un aplatissement équatorial  $f_{eq}$ .

Les paramètres géodésiques utilisés pour ces calculs sont regroupés dans le tableau (2.2). Les paramètres respectifs de l'ellipsoïde sont déterminés de telle sorte que le volume soit égal à celui d'une sphère de rayon  $3389508 \pm 3$  m, rayon MOLA (Smith *et al.* (2001)) et que les potentiels en chaque axe  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient égaux. Le volume martien est calculé numériquement en intégrant le volume compris entre le rayon moyen  $R_{MOLA}$  et le rayon au centre de masse, en pondérant par l'élément de surface associé.

$r_{MOLA}$ (m) (Smith <i>et al.</i> (2001))	$3389508 \pm 3$
$r_{eq}$ (m) (Smith <i>et al.</i> (2001))	$3396200$
$GM(m^3.s^{-2})$	$4.2828358 \cdot 10^{13}$
$\omega(rad.s^{-1})$	$7.0882181 \cdot 10^{-5}$
$\alpha_2^0$ (Yuan <i>et al.</i> (2001))	$-.875981139892 \cdot 10^{-3}$
$\alpha_2^2$ (Yuan <i>et al.</i> (2001))	$-.84316422715 \cdot 10^{-4}$
$\beta_2^2$ (Yuan <i>et al.</i> (2001))	$.496870945727 \cdot 10^{-4}$
$V(m^3)$	$1.6311554925969 \cdot 10^{20}$

TAB. 2.2 – Paramètres géodésiques utilisés pour le calcul de l'ellipsoïde tri-axial.

Par définition, le rayon d'un ellipsoïde tri-axial est donné par la formule suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.1)$$

$a$  et  $b$  étant les deux rayons équatoriaux et  $c$ , le rayon polaire.

La relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques est :

$$x = r \cos \lambda \cos \phi; y = r \cos \lambda \sin \phi \text{ et } z = r \sin \phi \quad (2.2)$$

d'où

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \lambda \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\cos^2 \lambda \sin^2 \phi}{b^2} + \frac{\sin^2 \lambda}{c^2}}} \quad (2.3)$$

Les aplatissements polaire et équatorial sont définis de la manière suivante :

$$f_p = \frac{\frac{a+b}{2} - c}{\frac{a+b}{2}} \text{ et } f_{eq} = \frac{a - b}{a} \quad (2.4)$$

Le potentiel de pesanteur doit être égal en  $a$ ,  $b$  et  $c$  :

$$\text{En } a : U_0 = \frac{GM}{a} \left[ 1 + \frac{J_2}{2} + 3J_{22} \right] + \frac{a^2 \omega^2}{2} \quad (2.5)$$

$$\text{En } b : U_0 = \frac{GM}{b} \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \left( \frac{J_2}{2} - 3J_{22} \right) \right] + \frac{b^2 \omega^2}{2} \quad (2.6)$$

$$\text{En } c : U_0 = \frac{GM}{c} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

Les valeurs du  $J_2$  et du  $J_{22}$  sont recalculées à chaque itération sur le rayon de l'ellipsoïde :

$$J_2 = -\sqrt{5} \alpha_2^0 \left( \frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$J_{22} = \frac{\sqrt{15}}{6} \sqrt{(\alpha_2^0)^2 + (\beta_2^0)^2} \left( \frac{r_{eq}}{a} \right)^2 \quad (2.9)$$

Les paramètres de l'ellipsoïde tri-axial sont regroupés dans le tableau (2.3).

## 2.2 Anomalie de gravité

### 2.2.1 Anomalie de l'aréoloïde

Cette anomalie correspond à l'écart entre l'aréoloïde et l'ellipsoïde tri-axial (figure (2.4)). Les plus fortes valeurs sont concentrées autour de la région de Tharsis.

a (m)	$3396084 \pm 3$
b (m)	$3394794 \pm 3$
c (m)	$3377650 \pm 4$
$U_0$ ( $m^2.s^{-2}$ )	$12654815 \pm 12$
$1/f_p$	$190,87 \pm 0,07$
$1/f_{eq}$	$2633,2 \pm 12,2$

TAB. 2.3 – Paramètres de l'ellipsoïde tri-axial.

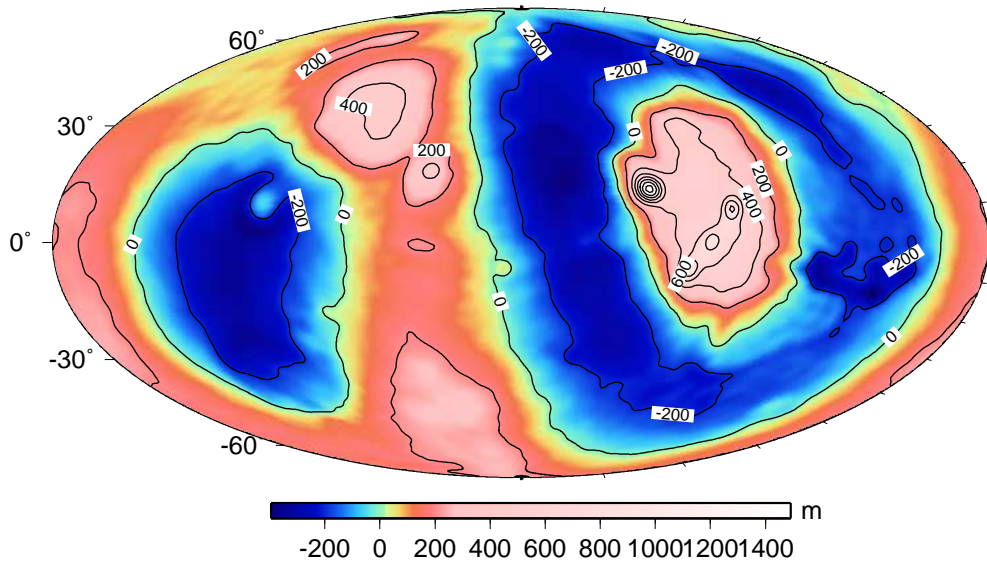


FIG. 2.4 – Anomalie de l'aréoïde par rapport à l'ellipsoïde tri-axial.

### 2.2.2 Gravité à l'air libre

La gravité à l'air libre correspond à la valeur de la pesanteur mesurée en un point et corrigée de l'altitude. En un point d'altitude  $h$  sur une sphère, la valeur de la gravité est donnée par :

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2} \frac{1}{(1+h/R)^2} \simeq g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \quad (2.10)$$

L'anomalie de gravité est la différence entre la gravité à l'air libre et la valeur théorique de la gravité (formule de MacCullagh, Turcotte et Schubert (1982)) :

$$g = \frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(3\sin^2\lambda - 1\right) \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 J_2\right] - r\omega^2 \cos^2\lambda \quad (2.11)$$

Si le relief est compensé, cette anomalie est quasi nulle. La figure (2.5) représente l'anomalie de gravité calculée pour la région d'Isidis et le cratère Hellas. Bien que la topographie de ces depressions soit constante, une anomalie de gravité est visible. Cette anomalie rappelle la présence du pic central du cratère lors de sa formation. Aujourd'hui, le pic central a disparu, mais son signal gravimétrique est toujours présent. De telles anomalies (*mascons*) ont été découvertes sur la Lune (Muller et Sjogren (1968)), confirmées ensuite par les premières missions Apollo (Murphy et Siry (1970)) et la mission Clementine (Arkani-Hamed (1998)).

## 2.3 Potentiel de pesanteur

Le potentiel de pesanteur d'un corps quasi-sphérique peut être exprimé par une décomposition en harmoniques sphériques :

$$U(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \overline{P}_l^m(\sin\phi) [\overline{C}_l^m \cos\lambda + \overline{S}_l^m \sin\lambda] + \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2\lambda \quad (2.12)$$

avec :

$r, \phi, \lambda$  : rayon, longitude, latitude

$a_e$  : rayon de référence

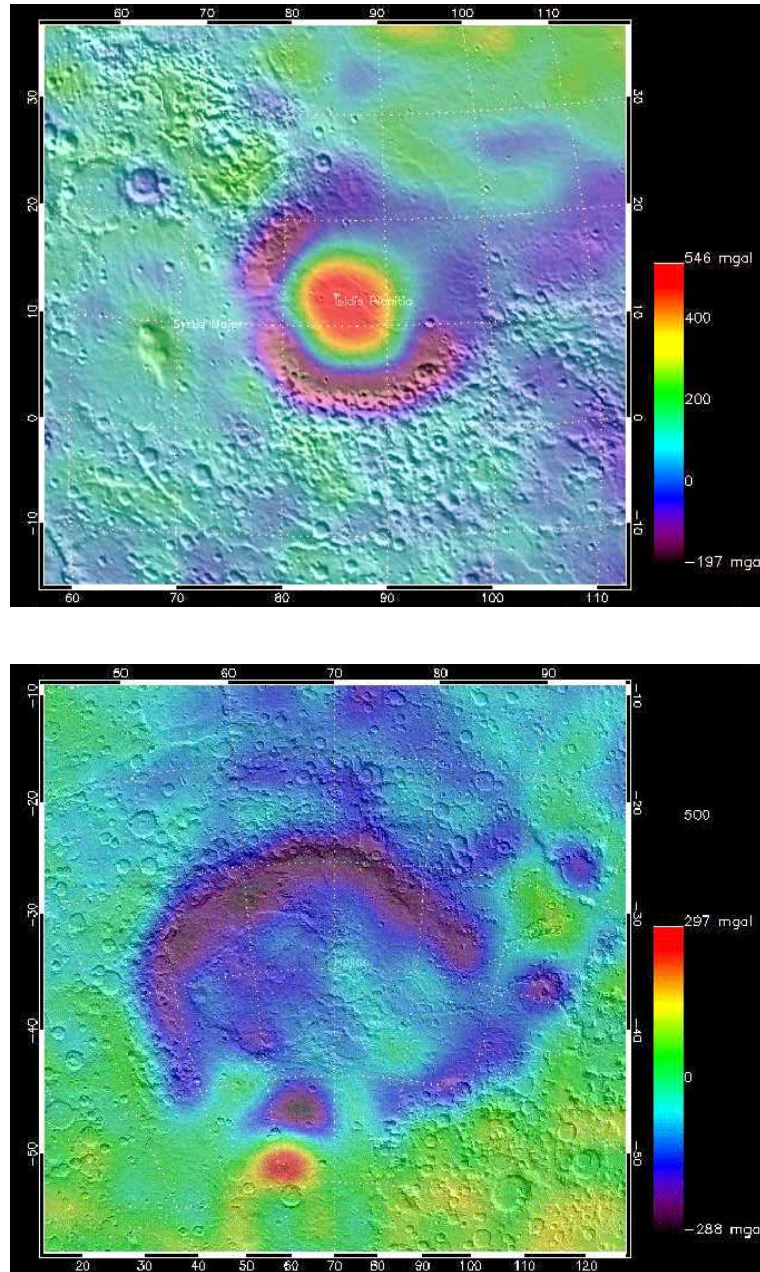


FIG. 2.5 – Anomalies de gravité sur Isidis et Hellas.



GM : constante gravitationnelle

$\overline{P}_l^m(\sin\phi)$  : polynôme de Legendre associé et normalisé de degré  $l$  et d'ordre  $m$

$\overline{C}_l^m, \overline{S}_l^m$  : coefficients d'harmoniques sphériques normalisés, de degré  $l$  et d'ordre  $m$

Le potentiel de pesanteur de Mars est déterminé à partir des coefficients d'harmoniques sphériques du modèle *jgm75d01* (Yuan *et al.* (2001)). Avant cela, il est nécessaire de déterminer le rayon au centre de masse de la planète à partir des coefficients d'harmoniques sphériques du modèle MOLA (Smith *et al.* (2000)). Malgré l'existence de modèles développés jusqu'au degré 85, nous nous limitons au degré 60, du fait de l'incertitude des coefficients d'ordre supérieur. La résolution du modèle s'obtient en divisant la circonférence par le degré de développement du potentiel, ce qui, pour notre modèle, correspond à une demi-longueur d'onde de  $3^\circ$ , soit environ 180 km. Le potentiel de pesanteur est représenté sur la figure (2.6). Nous allons voir dans le paragraphe suivant une application locale du calcul du potentiel de pesanteur.

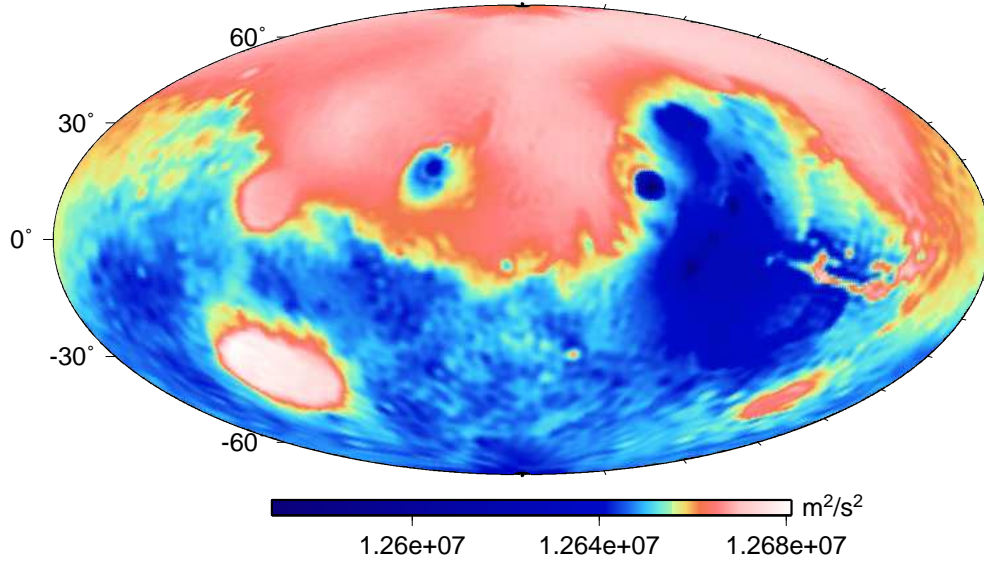


FIG. 2.6 – *Potentiel de pesanteur de Mars.*

## 2.4 Paléo-lignes de rivage

### 2.4.1 Historique

L'idée de l'existence d'un océan à la surface de Mars remonte à plus d'une quinzaine d'années. Les travaux de Parker *et al.* (Parker et Saunders (1987); Parker *et al.* (1989, 1993)), ont permis de mettre en évidence l'existence de paléo-lignes de rivage sur la planète grâce aux images des sondes Viking. Ces études se sont basées sur des paramètres tels que la variation d'albédo, les ruptures de pentes et les escarpements. Jusqu'à présent, un total de neuf lignes de rivage potentielles ont été identifiées (Parker *et al.* (1989); Parker (1998); Clifford et Parker (2001)). Des études récentes se sont focalisées sur des régions précises de ces contacts, comme des terrasses (Withers et Neumann (2001)) et de larges bassins d'impact (McGill (2001)). Les images MOC de la sonde Mars Global Surveyor ont permis de confirmer ces premières interprétations (Head *et al.* (1998, 1999); Clifford et Parker (2001)) et trois principaux contacts ont été identifiés comme des paléo-lignes de rivage : Meridiani, Arabia et Deuteronilus (figure (2.7) et (2.8)), datées toutes les trois de l'Hespérien (tableau (2.8) page 51).

Dans une récente étude, Webb (2004) reprend les travaux de Parker *et al.* (1989) avec une approche plus précise, notamment grâce à l'utilisation d'un jeu de données plus fourni, des images à plus haute résolution (figure (2.9)) et un Système d'Informations Géographiques. Il ressort de cette étude que les contacts Arabia et Deuteronilus sont validés, mais que l'existence d'une autre ligne de rivage, appelée Acidalia, est remise en question. De plus, les résultats viennent étayer l'hypothèse de l'existence d'un océan dans les plaines de l'hémisphère nord de Mars.

L'identification et la datation de lignes de rivage sur Mars sont complexes si l'on prend en compte le phénomène de rebond isostatique. Par exemple, sur Terre, les lignes de rivage Gilbert, Stansbury et Bonneville du lac Bonneville, correspondent à des étapes différentes du rebond post-glaciaire associées à des niveaux de 18, 32 et 73 m (Currey (1980)). Ces différentes portions d'une même ligne de rivage ont le même âge, mais présentent des altitudes bien différentes. Récemment, des modèles



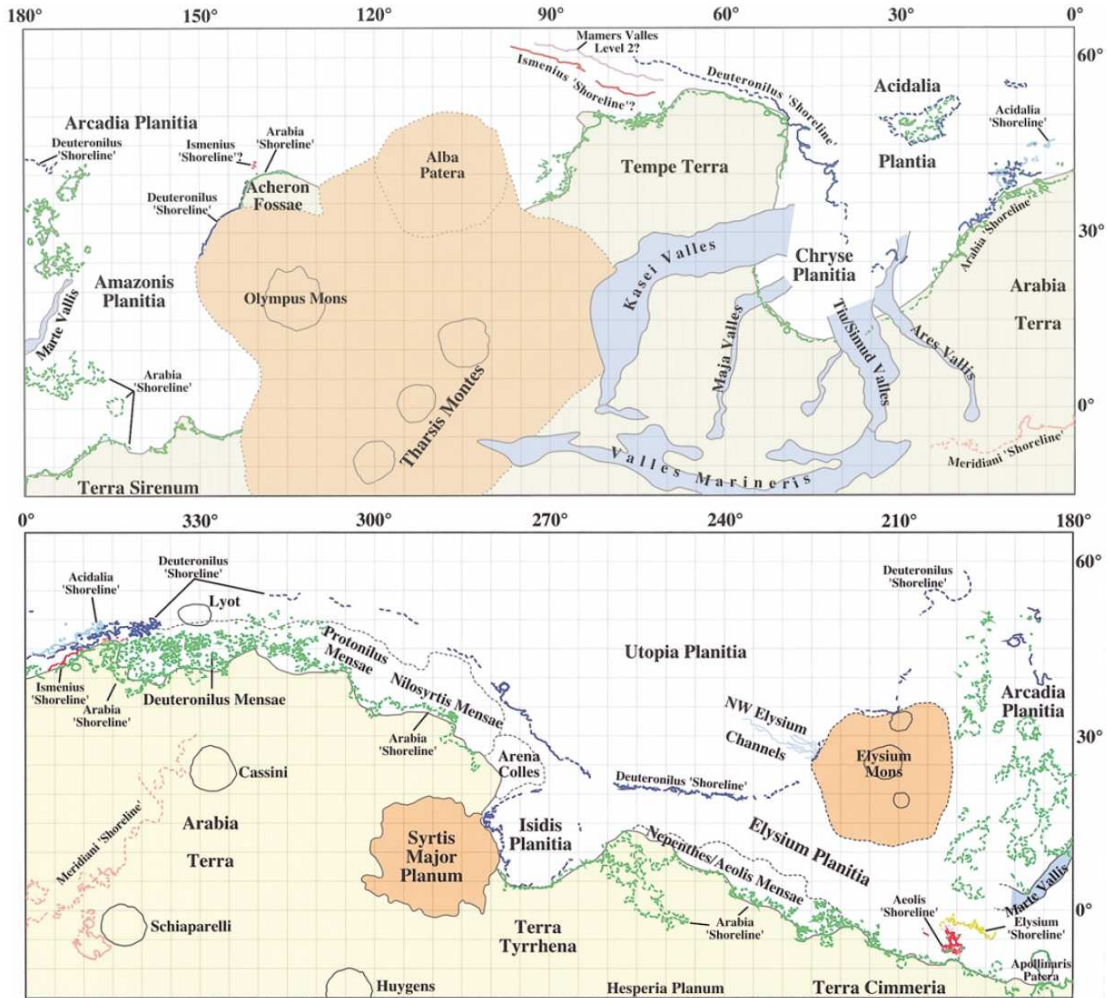


FIG. 2.7 – Principaux contacts identifiés sur Mars (Parker (1998); Clifford et Parker (2001)).

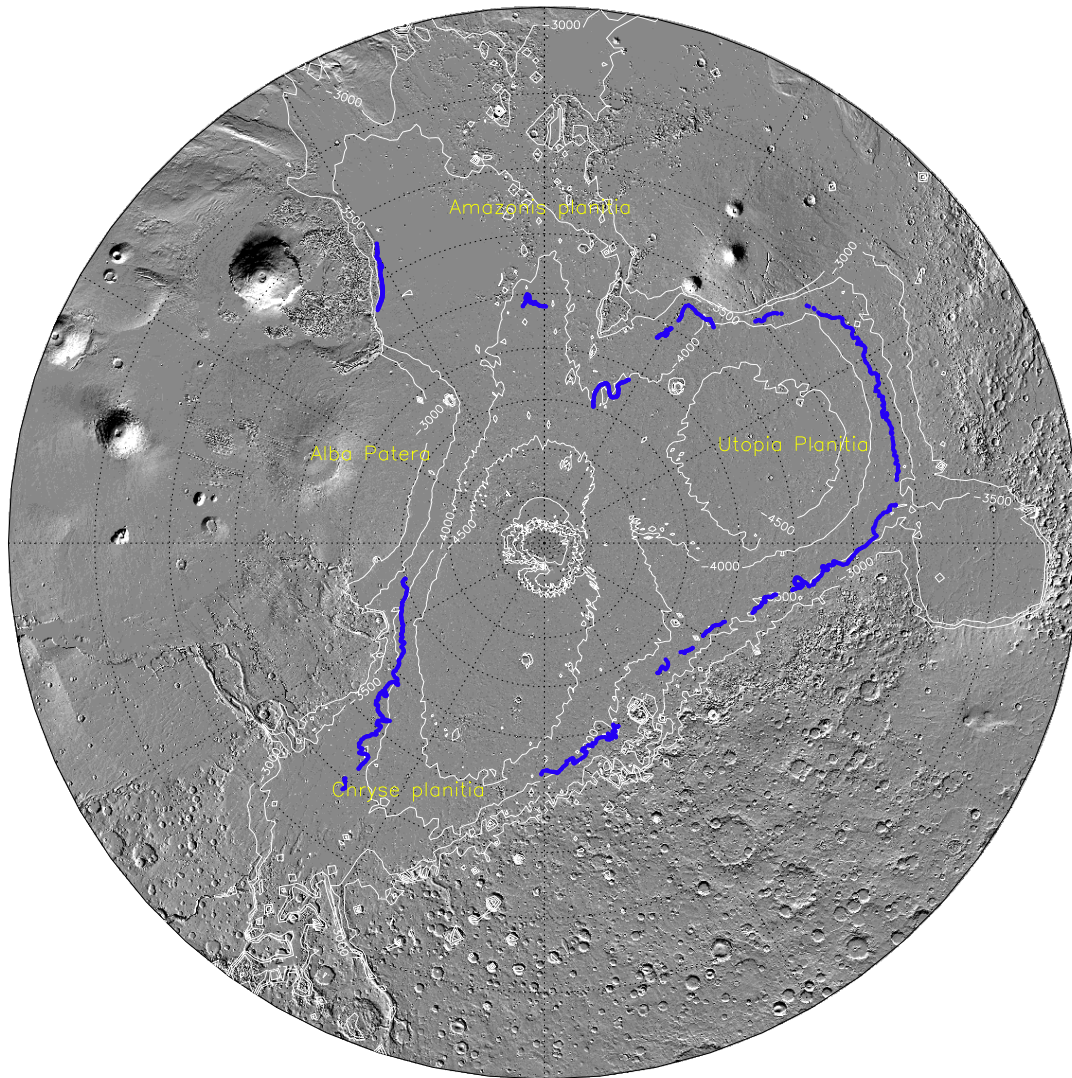


FIG. 2.8 – Vue globale de la ligne de rivage Deuteronilus autour du pôle Nord.

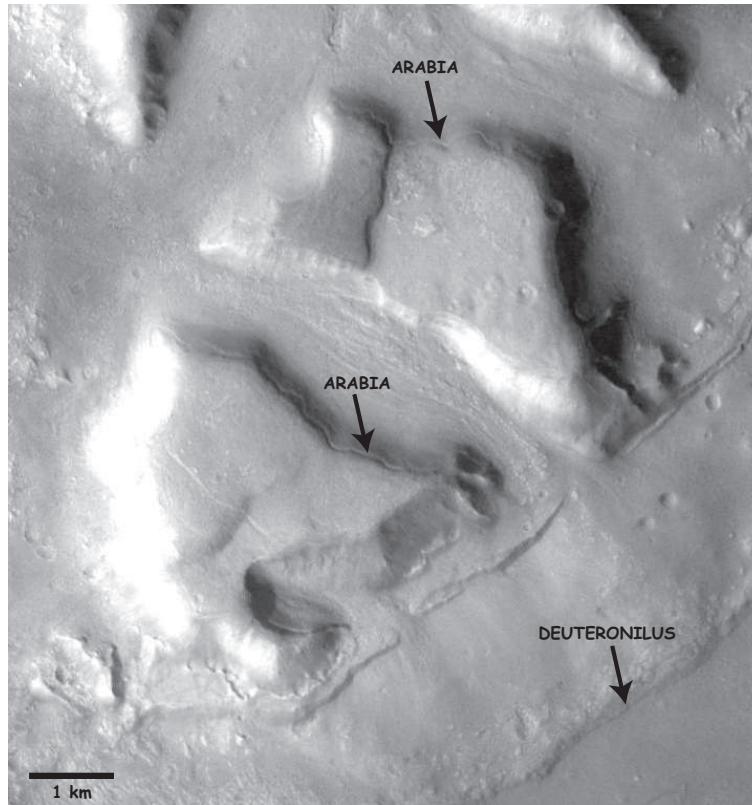


FIG. 2.9 – Image visible *Thémis V01361004* présentant les contacts *Arabia* et *Deuteronilus*.

d'ajustement isostatique ont été présentés pour certaines régions martiennes (Fairén *et al.* (2003a,b); Leverington *et al.* (2003); Ruiz *et al.* (2003)). Leverington *et al.* (2003) concluent que l'ajustement isostatique pourrait entraîner une variation de quelques centaines de mètres d'altitude des lignes de rivage du même âge. Cependant, la ligne de rivage Deuteronilus étudiée ici, ne couvre qu'une faible portion de la région supposée avoir abrité l'océan martien ; il y a donc peu de chance que de telles variations soient visibles à cette échelle.

### 2.4.2 Calcul du potentiel de pesanteur le long de Deuteronilus

Par définition, une ligne de rivage correspond à l'intersection entre la surface océanique et la surface continentale. Le volume d'eau qui constitue l'océan est en équilibre hydrostatique et par conséquent, la surface de cette océan correspond à une surface équipotentielle. Si la forme de Mars est restée la même depuis l'apparition de Deuteronilus, le potentiel de pesanteur le long de cette ligne de rivage devrait rester constant. Or, il n'en est rien (figure (2.10) et tableau 2.4). Le potentiel de pesanteur varie significativement d'environ  $3000m^2.s^{-2}$ , soit une variation d'élévation de près de 800 m (la variation du rayon est représentée sur la figure (2.10)).

Deux hypothèses peuvent expliquer une telle variation : soit que les linéaments observés dans les plaines nord ont été interprétés à tort comme des lignes de rivages, ce qui semble peu probable à la vue du nombre d'études géomorphologiques menées sur le sujet, soit que ces linéaments ont bien été mis en place dans un environnement marin, mais que le potentiel de pesanteur a évolué depuis, c'est à dire que cette ligne de rivage a subi une déformation au cours du temps. Si l'on choisit cette seconde hypothèse, il est nécessaire de déterminer l'origine de cette déformation et de la quantifier. L'indice principal à la base de cette seconde hypothèse est que la variation du potentiel présente une forme sinusoïdale, qui n'est pas sans rappeler la forme globale de Mars, proche de celle d'un ellipsoïde tri-axial.

paramètres	fit global	fit Est
a	$12666726,58 \pm 30,88$	$12667069,77 \pm 16,37$
b	$838,98 \pm 24,66$	$881,2 \pm 21,15$
c	$2,17 \pm 0,08$	$1,79 \pm 0,01$
d	$1,54 \pm 0,13$	$1,1 \pm 0,02$

TAB. 2.4 – Valeurs des paramètres des fonctions sinus  $f(x) = a + b\sin(cx + d)$  de la figure (2.10) ( $x$  est donné en radians).

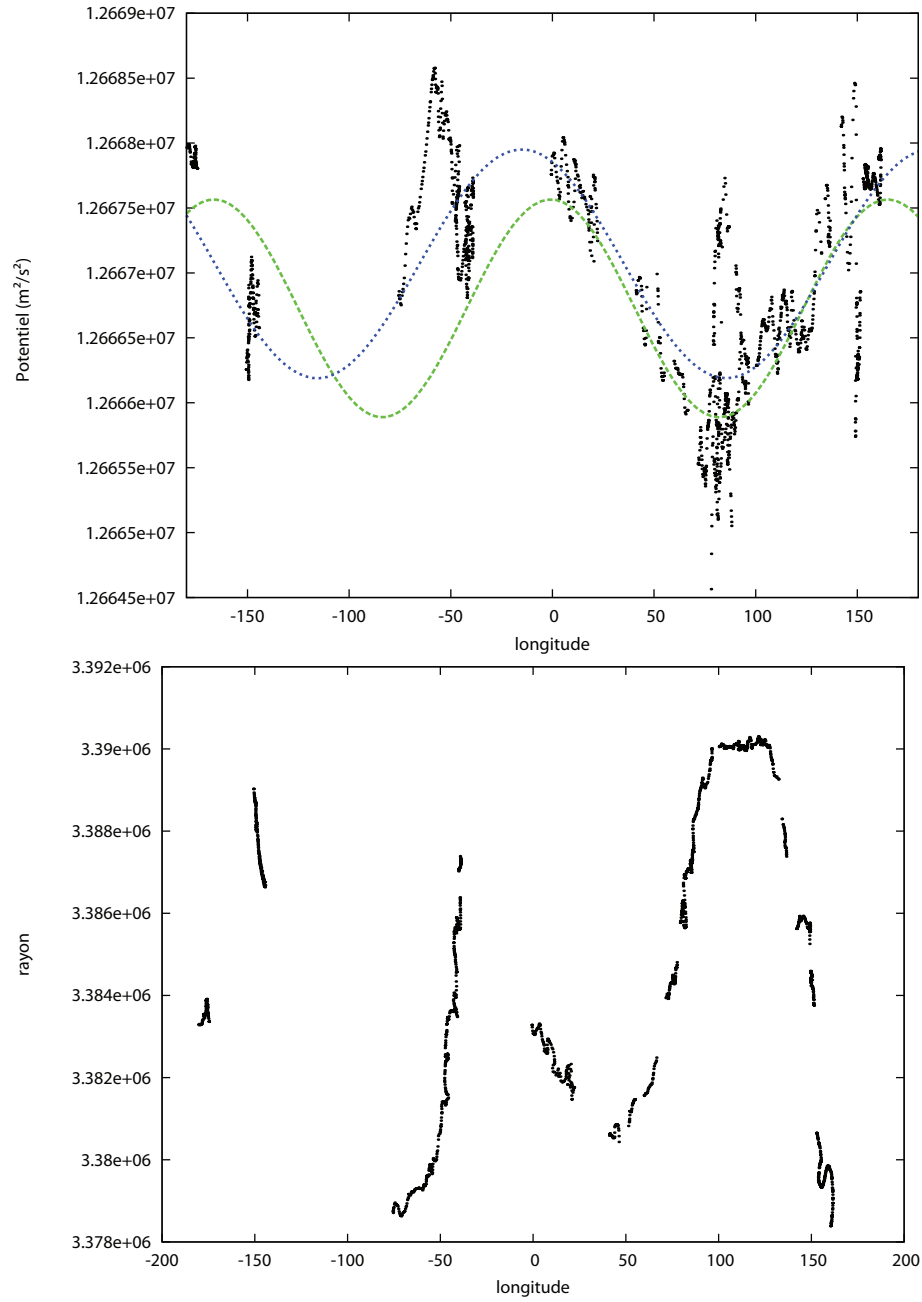


FIG. 2.10 – Haut : Potentiel de pesanteur en fonction de la longitude le long de la ligne de rivage Deuteronilus. En vert, la fonction sinus de l'hémisphère Est. En bleu la fonction sinus globale. Les paramètres des fonctions sinus sont regroupés dans le tableau (2.4). Bas : Variation du rayon au centre de masse le long de Deuteronilus.



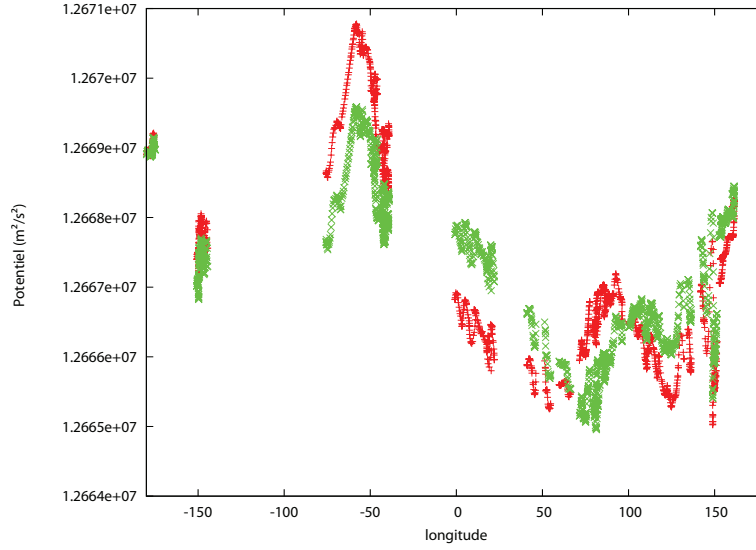


FIG. 2.11 – Potentiels de pesanteur développés au degré 2 ( $\times$ ) et 60 (+) le long de la ligne de rivage Deuteronilus.

### Comment expliquer la variation du potentiel de pesanteur ?

Le fait que le potentiel développé au degré 2 soit proche du potentiel global de Mars (figure (2.11)) nous permet d'utiliser les formulations contenant les constantes  $J_2$  et  $J_{22}$ . Le potentiel exprimé au degré 2 avec les polynômes de Legendre associés s'écrit de la manière suivante :

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 \left( \alpha_2^0 P_2^0(\sin(\lambda)) + (\alpha_2^2 \cos(2\phi) + \beta_2^2 \sin(2\phi)) P_2^2(\sin(\lambda)) \right) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2(\lambda) \quad (2.13)$$

avec

$$P_2^0(\sin(\lambda)) = \sqrt{\frac{5}{2}} [3\sin^2(\lambda) - 1] \text{ et } P_2^2(\sin(\lambda)) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2}} \cos^2(\lambda)$$

La même formule écrite cette fois avec les constantes  $J_2$  et  $J_{22}$  donne :

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \left( \frac{a_e}{r} \right)^2 \left( -\frac{1}{2} J_2 [3\sin^2(\lambda) - 1] + 3J_2^2 \cos(2(\phi - \phi_0)) \cos^2(\lambda) \right) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2(\lambda) \quad (2.14)$$

Remarque : Le code que nous utilisons est tel que :

$$P_2^0(code) = \overline{P}_2^0/\sqrt{2} \text{ et } P_2^2(code) = \overline{P}_2^0\sqrt{2}$$

La comparaison des formules (2.13) et (2.14) permet de déduire l'expression des constantes  $J_2$  et  $J_{22}$  ainsi que la position  $\phi_0$  du demi-grand axe  $a$  :

$$J_2 = -\sqrt{5}\alpha_2^2 \text{ et } J_{22} = \frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{(\alpha_2^2)^2 + (\beta_2^2)^2} \text{ et } \phi_0 = 74.7^\circ$$

L'angle de 75 degrés correspond à la longitude du minimum du potentiel de pesanteur le long de Deuteronilus, position qui coïncide avec la position du demi-grand-axe  $a$  à l'équateur. La variation du potentiel coïncide donc avec la variation du rayon à l'équateur (figure (2.12)). La longitude  $+75^\circ \pm \pi$  ( $-105^\circ$ ) correspond également à la longitude du rayon équatorial maximum de Mars, longitude à laquelle se situe le complexe volcanique de Tharsis, responsable de la forme globale tri-axiale de Mars.

L'hypothèse avancée est que la ligne de rivage Deuteronilus a été déformée lors de l'apparition du complexe de Tharsis et qu'elle a, par conséquent, enregistré la modification de la forme de Mars, modification caractérisée par le passage du mode bi-axial au mode tri-axial. Nous préciserons par la suite la succession des événements géologiques grâce aux dernières données spectrométriques de Mars Express (paragraphe 2.5).

### Distinction des différentes portions de la ligne de rivage

La variation sinusoïdale du potentiel le long de Deuteronilus présente deux pics, situés à environ  $-60^\circ$  et  $+90^\circ$  de longitude. Si l'on examine la figure (2.13), il apparaît que ces deux longitudes correspondent à des zones géographiques particulières.

La première (situé à  $-60^\circ$  de longitude) correspond à la zone où les lignes de rivage Arabia et Deuteronilus sont proches (précisément entre  $-48^\circ$  et  $-65^\circ$  de longitude). Il est possible que dans cette région, les deux lignes aient été confondues, ce qui signifierait que le pic observé serait associé à Arabia.

La seconde zone ( $+90^\circ$  de longitude) correspond à Isidis Planitia. Dans cette région, la ligne de rivage Deuteronilus est discontinue. Cette portion correspond au second pic

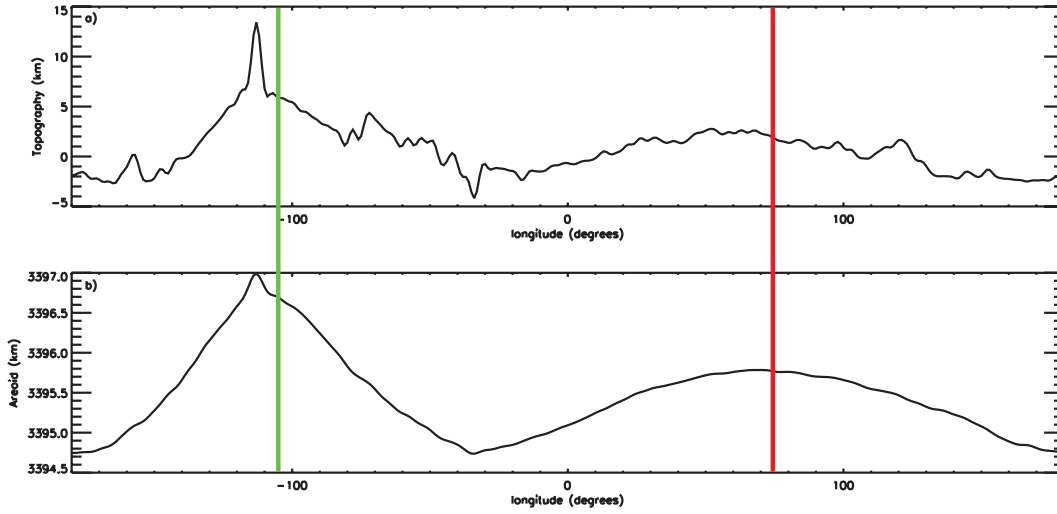


FIG. 2.12 – Profils équatoriaux de la topographie et du géoïde martiens. La ligne rouge indique la longitude du potentiel de pesanteur minimum le long de Deuteronilus ( $75^\circ$ ).

observé dans le potentiel de pesanteur. Cette portion ne fait sans doute pas partie de Deuteronilus.

Il semble donc possible de distinguer qualitativement la ligne de rivage Deuteronilus des autres lignes de rivage de l'hémisphère Nord, grâce à des arguments géophysiques. Par la suite, nous éliminerons tous les points faisant partie de ces portions étrangères (figure (2.14)).

paramètres	valeur
a	$12666887,27 \pm 9,16$
b	$984,98 \pm 13,22$
c	2
d	$2,05 \pm 0,01$

TAB. 2.5 – Valeurs des paramètres de la fonction sinus  $f(x) = a + b\sin(cx + d)$  représentée sur la figure (2.14) ( $x$  est donné en radians).



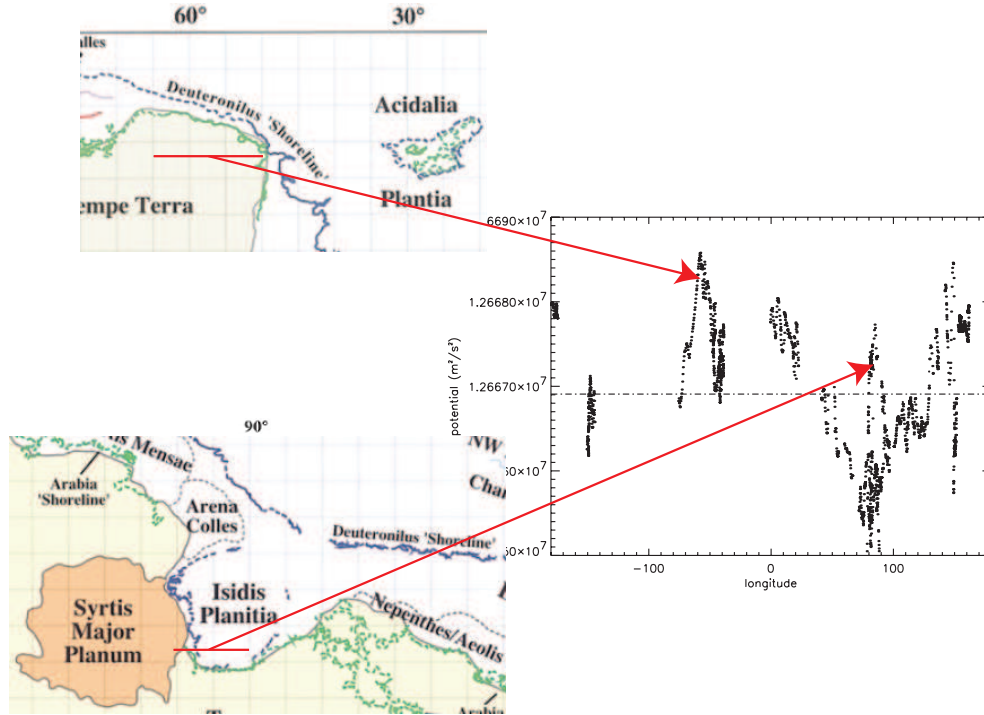


FIG. 2.13 – Localisation des extrema du potentiel de pesanteur le long de *Deuteronilus*.

### Remarques sur les variations du potentiel de pesanteur

Le potentiel de pesanteur corrigé varie d'environ  $2400 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , ce qui correspond à une variation d'élévation de 645 m. Si l'on compare la valeur moyenne du potentiel de pesanteur le long de *Deuteronilus* (tableau (2.5)) à la valeur du potentiel de référence utilisé pour le calcul de l'ellipsoïde tri-axial dans la section 2.1.2, la différence s'élève à environ  $12000 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , soit une variation d'élévation de plus de 3200 m. Cela suggère que la surface de l'océan associé à *Deuteronilus* était plus basse de 3 km en-dessous du rayon de la planète, si l'on fait l'hypothèse que l'écart entre le rayon de la surface de référence et le rayon moyen le long de *Deuteronilus* est resté constant.

L'écart entre le demi-grand axe  $a$  et le demi-moyen axe  $b$  de l'ellipsoïde triaxial est de 1290 m (figure (2.14) et section (2.1.2)). Cette différence d'élévation correspond à une variation du potentiel de pesanteur d'environ  $4800 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , deux fois supérieure à la variation du potentiel le long de *Deuteronilus*.

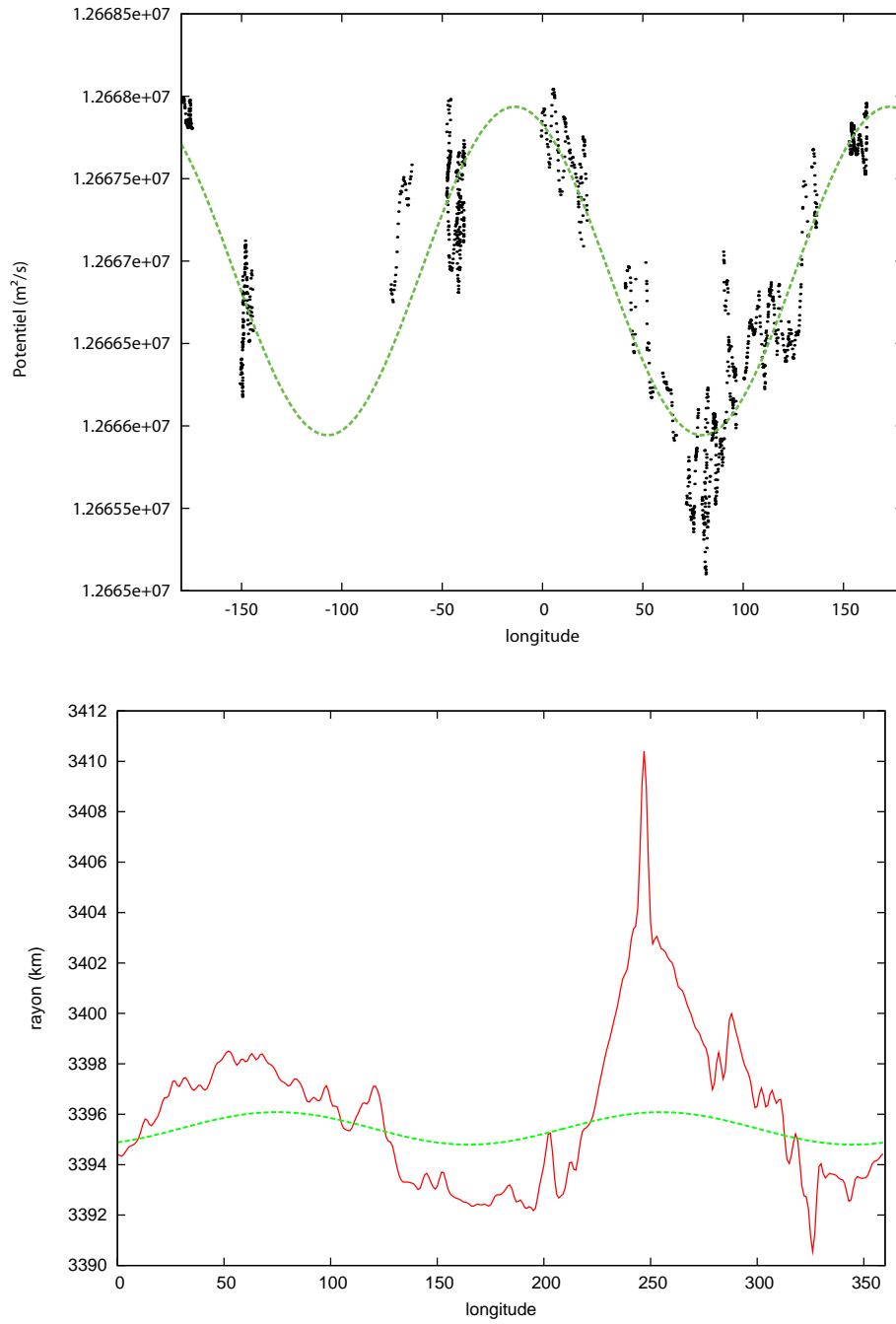


FIG. 2.14 – *Haut : potentiel de pesanteur corrigé. En pointillés, la fonction sinus dont les paramètres sont regroupés dans le tableau (2.5). Bas : profils équatoriaux du rayon au centre de masse de Mars (trait plein) et de l'ellipsoïde tri-axial calculé en section (2.1.2).*

### 2.4.3 Volume de l'océan martien

À présent, il est possible d'évaluer les caractéristiques de l'océan martien associé à Deuteronilus. Pour déterminer les frontières de cette région, nous déterminons les longitudes et latitudes des points dont le rayon est inférieur au rayon MOLA, en supposant que le potentiel ne varie qu'en fonction de la longitude. Pour chaque longitude, nous calculons le rayon tel que le potentiel de pesanteur soit égal au potentiel de la fonction sinus de la figure (2.15). Nous pouvons ainsi déterminer la profondeur moyenne, la surface et le volume de l'océan (figure (2.16) et tableau (2.7)). La surface de l'océan représente près de 15% de la surface de Mars et son volume représente 75% de l'océan arctique terrestre. Le volume calculé ici est plus faible que les valeurs publiées dans les précédentes études, qui évoquaient un volume de  $19 \text{ Mkm}^3$  (Carr et Head (2003)). Cela s'explique notamment par le fait que cette étude portait sur une surface supérieure à celle délimitée par Deuteronilus.

Il faut également noter que le phénomène de rebond isostatique n'a pas été pris en compte dans cette étude. Leverington *et al.* (2003) ont estimé que l'ajustement isostatique à la suite de la disparition de l'océan pourrait atteindre quelques centaines de mètres. Le volume estimé de l'océan martien augmenterait alors d'un peu plus de 30%, ce qui donnerait un volume total proche de  $16 \text{ Mkm}^3$ , valeur plus proche de celle évoquée dans les précédentes études.

Sur Terre, la masse des océans représente 0,23‰ de la masse de la planète. Sur Mars, si l'on prend un volume de référence de  $20 \text{ Mkm}^3$ , ce rapport chute à 0,03‰. Si l'on se base sur les dernières études des météorites martiennes, notamment les Shergottites (Karlsson *et al.* (1992); McSween *et al.* (2001)), le taux d'hydratation du manteau martien serait compris entre 130 et 350 ppm. Ce taux correspond à une masse d'eau disponible de  $6.10^{19}$  à  $2.10^{20}$  kg, soit une masse 4 à 10 fois supérieure à celle de l'océan martien. La question est donc de savoir pourquoi toute l'eau disponible au début de la formation de Mars n'est pas venue alimenter l'océan : s'est-elle évaporée avec l'arrêt du champ magnétique martien ou s'est-elle infiltrée dans le sous-sol de la planète ?

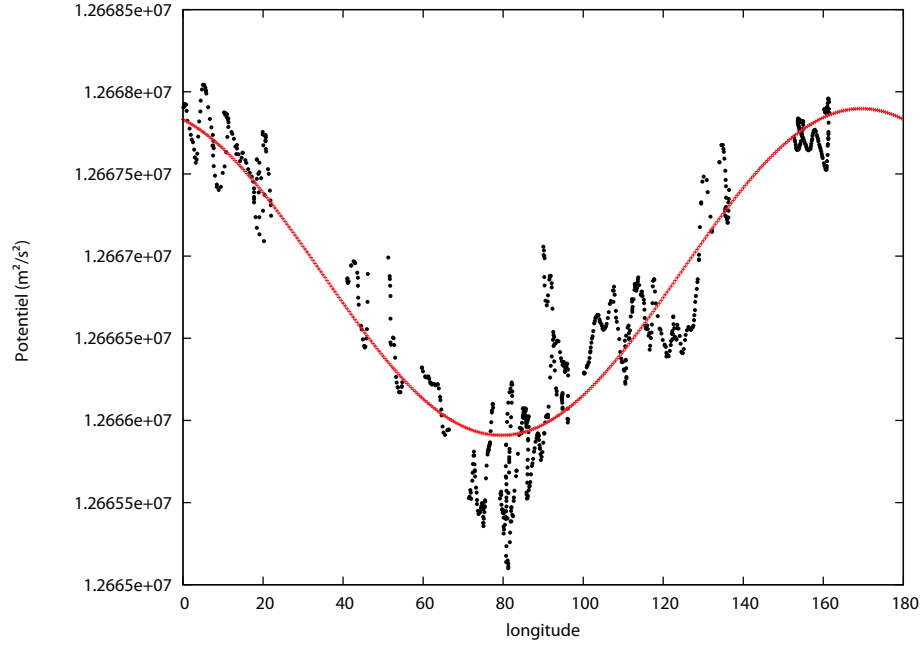


FIG. 2.15 – *Potentiel de pesanteur corrigé (hémisphère Est). En pointillés, la fonction sinus utilisée pour la détermination des frontières géographiques de l’océan martien.*

paramètres	valeur
a	$12666904 \pm 10,67$
b	$994 \pm 13,06$
c	2
d	$1,937 \pm 0,017$
rms	1,281

TAB. 2.6 – *Valeurs des paramètres de la fonction sinus  $f(x) = a + b\sin(cx + d)$  représentée sur la figure (2.15) ( $x$  est donné en radians).*

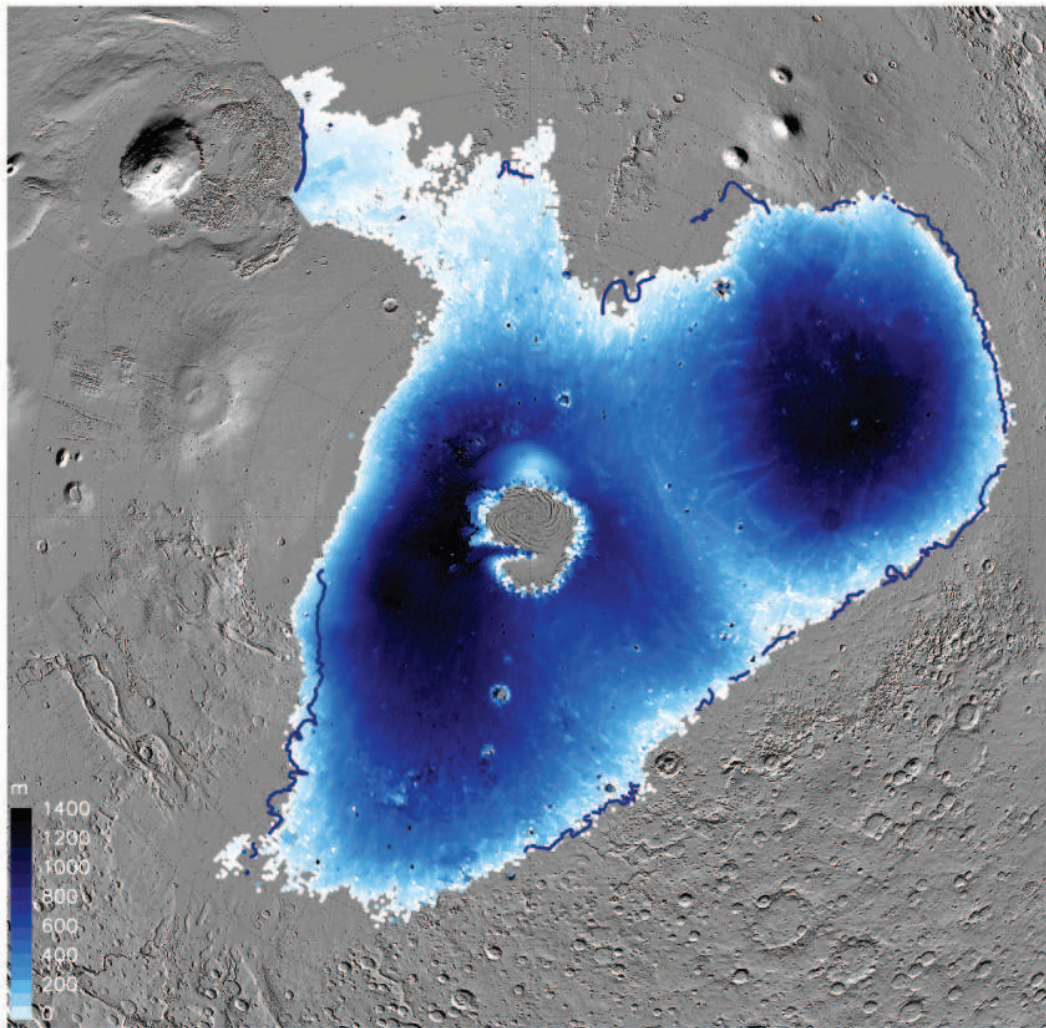


FIG. 2.16 – Localisation et profondeur de l'océan martien associé à Deuteronilus.

profondeur moyenne	554 m
profondeur maximale	1450 m
surface	21,5 Mkm <sup>2</sup>
volume	11,9 Mkm <sup>3</sup>

TAB. 2.7 – Caractéristiques de l'océan martien associé à Deuteronilus.

L'étude de Deuteronilus nous ramène naturellement à l'histoire de l'eau sur Mars et l'histoire géologique globale de la planète. Nous retraçons ici les grandes périodes de l'histoire martienne afin de mieux comprendre la chronologie des événements et l'histoire de Deuteronilus.

## 2.5 Histoire géologique de Mars

L'histoire géologique de Mars peut être décomposée en trois périodes majeures (figure (2.17) et tableau (2.8)). Les modèles basés sur le comptage de cratères d'impact permettent de classer ces trois périodes, de la plus ancienne à la plus récente : le Noachien, l'Hespérien et l'Amazonien (Tanaka *et al.* (1992)). La difficulté qui réside dans l'estimation de l'âge de la surface martienne provient du fait que nous ne disposons que de datations relatives, basées sur les lois fréquence/taille des impacts lunaires. Le modèle le plus récent (Hartmann (2005)), place la limite Noachien-Hespérien entre 3,5 et 3,7 Ga et celle de l'Hespérien-Amazonien entre 2,9 et 3,2 Ga (tableau (2.8)).

Au début du Noachien, sous le bombardement météoritique incessant, la croûte martienne est recouverte de cratères et de bassins d'impact. Peu à peu, le volcanisme régional se met en place et se poursuit jusqu'au début de l'Hespérien. Au Noachien supérieur, sous l'impulsion de processus aquifères, les réseaux de vallées se mettent en place. Enfin, de l'Hespérien supérieur à l'Amazonien, toute trace d'activité de surface semble disparaître. Les structures de l'hémisphère sud se sont principalement formées au Noachien et au début de l'Hespérien. Quant à l'hémisphère nord, les structures se sont formées plus récemment, entre l'Hespérien supérieur et l'Amazonien inférieur.

Récemment, grâce aux résultats du spectromètre OMEGA embarqué sur la sonde européenne Mars Express (Gendrin *et al.* (2005); Poulet *et al.* (2005); Bibring *et al.* (2006)) et aux rovers américains Spirit et Opportunity (Squyres *et al.* (2004)), de nouveaux minéraux ont été identifiés à la surface de Mars (figure (2.18)). Ces résultats ont permis de mieux comprendre le passé de la planète et d'élaborer un scénario plus précis de l'histoire géologique de la planète.



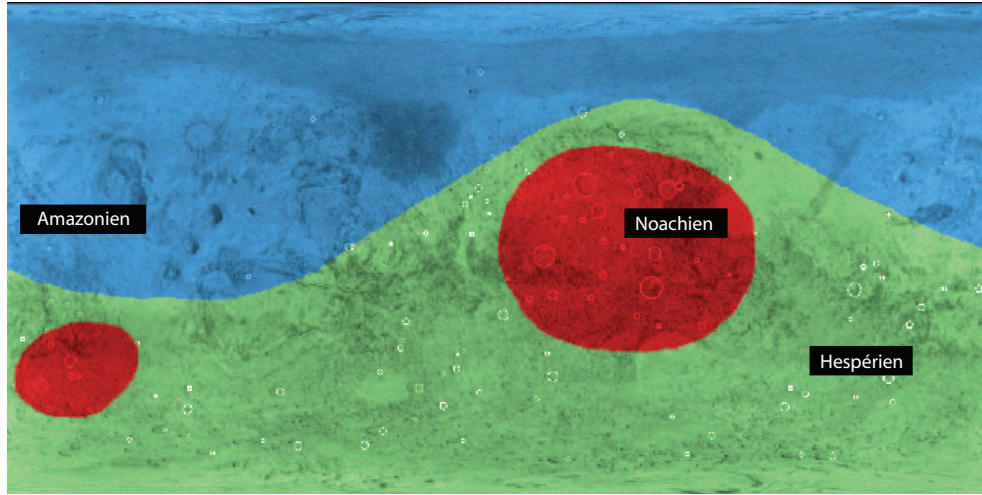


FIG. 2.17 – Carte simplifiée des âges géologiques martiens basés sur la densité de cratères (Source Malin Space Science System).

Ère	Âge absolu (Hartmann)	Âge absolu (Neukum et Wise)
Amazonien supérieur	0,25 à 0,00 Ga	0,70 à 0,00 Ga
Amazonien moyen	0,70 à 0,25 Ga	2,50 à 0,70 Ga
Amazonien inférieur	1,80 à 0,70 Ga	3,55 à 2,50 Ga
Hespérien supérieur	3,10 à 1,80 Ga	3,70 à 3,55 Ga
Hespérien inférieur	3,50 à 3,10 Ga	3,80 à 3,70 Ga
Noachien supérieur	3,85 à 3,50 Ga	4,30 à 3,80 Ga
Noachien moyen	3,92 à 3,85 Ga	4,50 à 4,30 Ga
Noachien inférieur	4,60 à 3,92 Ga	4,60 à 4,50 Ga

TAB. 2.8 – Échelle des temps géologiques de Mars (Hartmann (2005)).

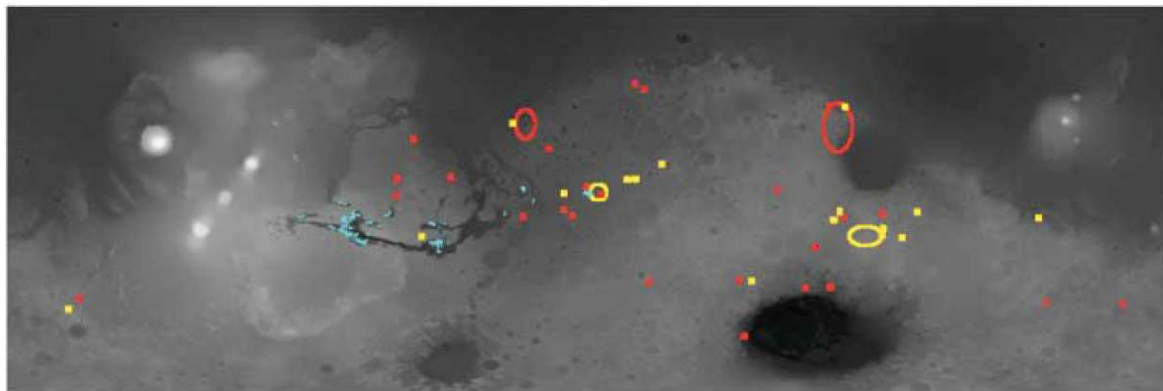


FIG. 2.18 – Localisation des minéraux hydratés identifiés par le spectromètre OMEGA de la sonde européenne Mars Express. En rouge, les phyllosilicates. En bleu, les sulfates. En jaune, divers minéraux hydratés. (d'après Bibring et al. (2006)).

### 2.5.1 La découverte des phyllosilicates ou l'eau en abondance

Il y a 4,1 à 3,8 milliards d'années, l'eau coulait en abondance à la surface de Mars. En quelques centaines de millions d'années, l'eau a érodé les roches volcaniques en les transformant en argiles. Ces argiles ont récemment été détectés par Mars Express dans Mawrth Vallis (figure (2.19)). Les dépôts sont principalement situés sur les hauts plateaux cratérisés datés du Noachien, entre les latitudes 30°N et 30°S (Poulet *et al.* (2005)), précisément sur Nili Fossae, Syrtis Major, Arabia Terra et Mawrth Vallis. Sur les versants de cette vallée située entre 20 et 28 degrés de latitude nord et 17 à 22 degrés de longitude ouest, Mars Express a détecté des dépôts sur plus de 500 mètres d'épaisseur (Poulet *et al.* (2005)). Les argiles font partie de la famille des phyllosilicates ; ces minéraux constituent une classe très spécifique de produits hautement altérés par des processus faisant appel à l'eau. Ils se forment dans des milieux à pH neutre comme de grandes étendues d'eau restées à la surface de Mars pendant une longue durée. La découverte de ces minéraux est donc la preuve que Mars a connu dès le début de son histoire une période humide et que l'eau liquide se trouvait en abondance à la surface de la planète.



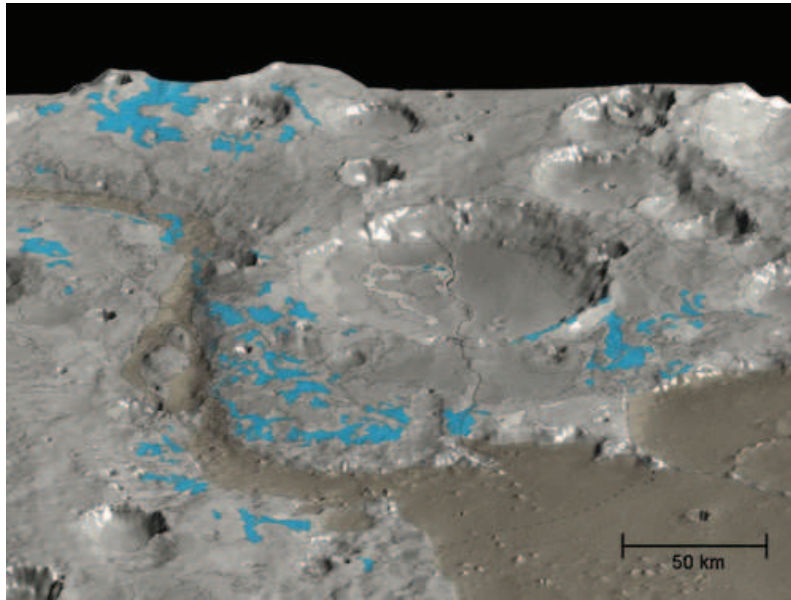


FIG. 2.19 – Localisation des argiles découvertes par Mars Express dans Mawrth Vallis.

### 2.5.2 L'eau se change en glace

Les terrains où les argiles ont été détectées datent au maximum de 3,8 milliards d'années (Hartmann (2005)). L'eau liquide a donc dû disparaître suite à un changement climatique majeur. À la fin du Noachien, Mars avait déjà perdu son champ magnétique (Arkani-Hamed (2004); Hood *et al.* (2005)). Le gaz carbonique contenu dans l'atmosphère de Mars s'est donc peu à peu échappé, ce qui a entraîné la diminution de l'effet de serre et la disparition de l'eau liquide en surface. L'érosion aurait cessé moins d'un milliard d'années après la formation de la planète, ce qui semble s'accorder avec les observations géomorphologiques : sur la grande majorité des terrains datant du Noachien, d'importants ravinements sont visibles (Balme *et al.* (2006)), notamment sur les gros cratères d'impact et peu de cratères de moins de 15 kilomètres de diamètre sont visibles, signe d'une forte activité érosive de l'eau. Mais les cratères formés quelques millions d'années plus tard sont en parfait état, comme si l'érosion s'était brutalement arrêté. Il y a 3,8 milliards d'années, Mars est donc devenue un monde froid et sec, où l'eau n'existait plus que sous forme de glace.

### 2.5.3 Les lacs acides et les sulfates hydratés

Au début de l'Hespérien, il y a 3,6 milliards d'années, Mars connaît une phase de volcanisme intense et ce pendant près de 100 millions d'années (Bibring *et al.* (2006)). Les laves émises par les volcans recouvrent la moitié de la surface de la planète et les volcans tels que Olympus Mons, Hecathes Tholus ou Ascreaus Mons rejettent des quantités importantes de gaz carbonique et de soufre dans l'atmosphère. En plusieurs régions du globe (Valles Marineris, Terra Meridiani), des failles apparaissent et l'eau souterraine, chauffée et rendue liquide, s'échappe. Localement, des lacs salés apparaissent et l'atmosphère chargée de soufre rend ces lacs acides. Pendant plusieurs millions d'années, au rythme des variations du niveau de ces lacs, des sulfates vont se former. Ces dépôts ont été détectés dès 2004 dans Terra Meridiani par le rover Opportunity, puis sur les collines Columbia, par le rover Spirit (Squyres *et al.* (2004); Wang *et al.* (2006)). Ces minéraux se forment dans un milieu au pH acide, qui traduit un environnement de lac peu profond où apparaissent des évaporites. Depuis ces premières découvertes, Mars Express a confirmé l'existence de ces dépôts (Gendrin *et al.* (2005); Bibring *et al.* (2006)); le spectromètre OMEGA a en effet détecté une immense étendue de sulfates à 100 kilomètres au nord-est du site d'atterrissage d'Opportunity (figure (2.20)), ainsi que d'autres dépôts dans la région de Valles Marineris et au pôle Nord.

### 2.5.4 Mars désertique

Lentement, l'activité volcanique à la surface de Mars va diminuer : n'étant plus alimentée, l'atmosphère va peu à peu s'appauvrir et les lacs isolés vont s'assécher. Aujourd'hui, ayant presque totalement perdu son atmosphère, Mars n'est plus qu'un désert : la température moyenne y est de  $-60^{\circ}\text{C}$  et la pression n'excède pas les 6 millibars. De telles conditions ne sont plus propices à la présence d'eau liquide en surface. Malgré cela, certaines régions tendent à montrer que Mars n'est pas aussi endormie : certains écoulements datent seulement de 3 millions d'années (Reiss *et al.* (2004)). Ces épisodes ponctuels et intenses correspondent à des vallées de débâcles avec des débits de plusieurs

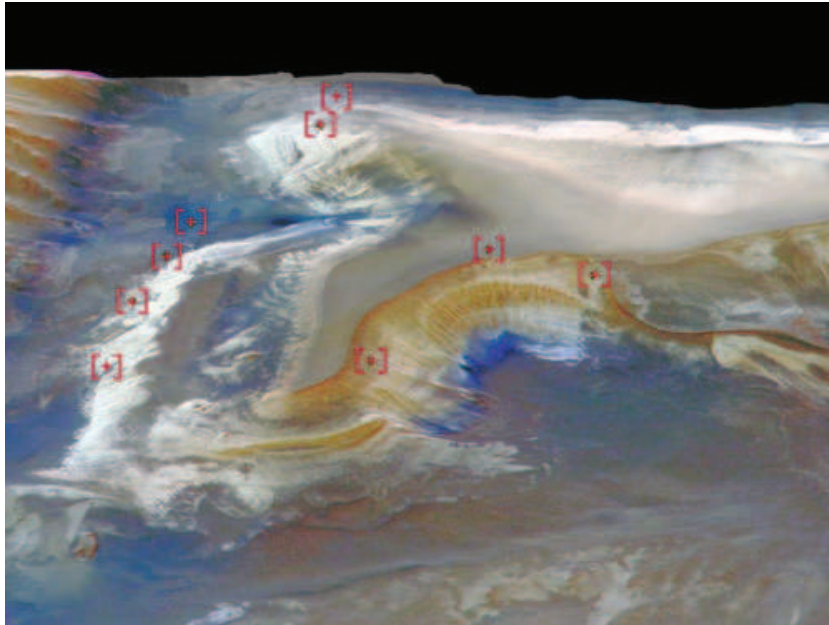


FIG. 2.20 – *Localisation des sulfates découverts par Mars Express.*

millions de mètres cubes par seconde, sur des étendues de plus de 100 km (Balme *et al.* (2006)). Ces épisodes seraient liés à de récents pics d'activité volcanique : des surfaces âgées de quelques millions d'années seulement ont été découvertes dans la caldeira d'Olympus Mons grâce aux caméras HRSC de Mars Express (Neukum *et al.* (2004)), preuve que Mars possède encore une activité géothermique non négligeable.

Les données spectrométriques récoltées par OMEGA, Spirit et Opportunity ont permis d'identifier pour la première fois à la surface de Mars des minéraux tels que les argiles ou les sulfates, témoignant de la présence d'eau liquide sur Mars par le passé. Ces résultats ont également permis de proposer un scénario fiable quant à l'enchaînement des étapes géologiques majeures qui ont façonné la surface de la planète (figure (2.21)). Ce scénario vient confirmer notre hypothèse de travail concernant l'histoire de la ligne de rivage Deuteronilus.

## 2.6 L'histoire de Deuteronilus

L'étude de la variation du potentiel de pesanteur le long de Deuteronilus nous a permis de démontrer que cette ligne de rivage a enregistré la déformation de Mars lors de l'apparition de Tharsis au Noachien supérieur. Les études spectrométriques menées par OMEGA ont permis de préciser l'histoire géologique martienne et sont venues confirmer notre hypothèse de départ. Il nous est donc possible aujourd'hui d'élaborer un scénario crédible à la vue de ces nouveaux éléments :

- Noachien inférieur : l'eau liquide s'écoule à la surface de Mars et l'océan recouvre une grande partie de l'hémisphère Nord (argiles). La ligne de rivage Deuteronilus qui délimite l'océan se forme alors. Peu à peu l'eau disparaît et Deuteronilus se "fossilise".
- Noachien supérieur : Mars connaît une phase de volcanisme intense. Le soufre rejeté dans l'atmosphère se dissout dans les quelques lacs encore présents (sulfates). Le dôme de Tharsis apparaît et entraîne une modification générale de la forme de la planète que Deuteronilus enregistre par sa propre déformation.
- Hespérien supérieur : le volcanisme diminue, l'atmosphère martienne se raréfie, les conditions ne sont plus propices à la présence d'eau liquide en surface (oxydes de fer anhydres).

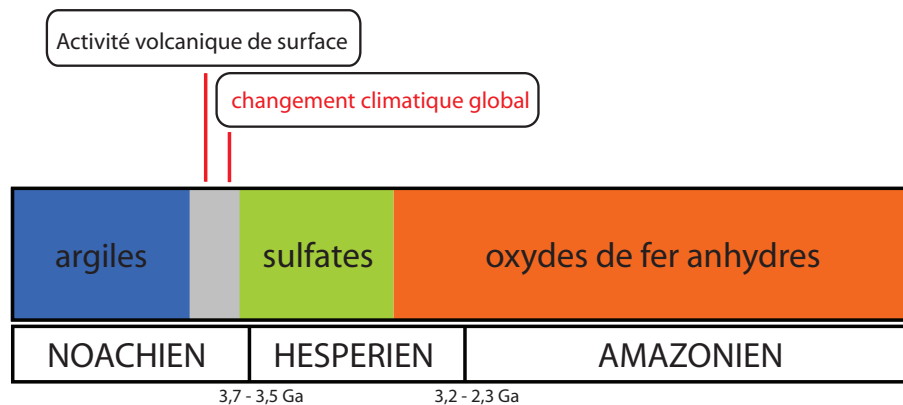


FIG. 2.21 – Représentation schématique de l'histoire de l'altération des minéraux de Mars (d'après Bibring et al. (2006)).

### Perspectives de travail

Nous avons tenté d'évaluer quantitativement la déformation de Mars au Noachien supérieur en supposant que le moment d'inertie, la vitesse de rotation et le volume de la planète sont restés constants.

Nous nous sommes basés sur deux hypothèses : d'une part, que la topographie est restée la même et qu'elle est actuellement en équilibre isostatique, et d'autre part, que le paramètre  $J_2$  est resté constant, alors que le terme  $J_{22}$  (traduisant l'aplatissement équatorial de la planète) a varié au cours du temps. Nous avons ensuite recalculé pour chaque  $J_{22}$  la valeur du potentiel le long de Deuteronilus, dans le but de retrouver un potentiel constant, en minimisant l'écart type, mais de telles hypothèses ne nous ont pas permis d'aboutir à des conclusions satisfaisantes.

Un autre axe de recherche à développer pourrait être l'effet du basculement de l'axe de rotation de Mars sur la ligne de rivage Deuteronilus. Des études magnétiques (Hood *et al.* (2005); Boutin et Arkani-Hamed (2006)), gravimétriques (Sprenke *et al.* (2005)), spectrométriques (Feldman *et al.* (2004)) et géomorphologiques (Schultz et Lutz (1988)) s'accordent sur la position du paléo-pôle martien et tendent à prouver que la formation du dôme de Tharsis au Noachien supérieur a entraîné un déséquilibre des masses et une réorientation totale de la planète. Un tel changement du moment d'inertie de Mars a sans doute eu des effets non négligeables sur le potentiel de pesanteur de la planète.

D'autres phénomènes géologiques tels que le réajustement isostatique ou des déformations locales ont également pu affecter le potentiel de pesanteur et devront être quantifier.

Dans la section suivante, nous allons continuer notre étude de Mars grâce à l'analyse de l'hypsométrie de la planète. Nous aborderons tout d'abord les caractéristiques hypsométriques de la Terre et de Vénus, puis nous verrons quelles conclusions l'on peut tirer des données hypsométriques martiennes.

## 2.7 Hypsonétrie

### 2.7.1 Introduction

L'hypsonétrie est un outil de représentation du relief couramment utilisé dans les disciplines de la géographie et de la géomorphologie (Cogley (1985)). Il consiste à produire la distribution de l'élévation en fonction de la surface en calculant la proportion de surface par tranche d'élévation. Les courbes obtenues à partir des données topographiques permettent de révéler l'activité interne à l'échelle de la planète. L'intérêt principal de cette méthode est de pouvoir appréhender des données tri-dimensionnelles par une approche bi-dimensionnelle.

L'autre manière d'aborder la distribution du relief est la courbe d'hypsonétrie cumulée, obtenue en sommant les surfaces de chaque intervalle d'élévation, des hautes vers les basses élévations.

### 2.7.2 Sources de données

Les données topographiques terrestres sont issues du modèle TerrainBase de la NOAA et présentent une résolution de 5 minutes (<http://www.ngdc.noaa.gov>). Les données topographiques martiennes sont issues des données MOLA (MEGDR 32 pixels par degré <http://pds-geosciences.wustl.edu>). Les données de Vénus proviennent des données Magellan (<http://pds-geosciences.wustl.edu>).

Notes :

- La topographie terrestre a été ajustée isostatiquement en prenant en compte l'effet de charge des océans, avec une densité de  $3300 \text{ kg.m}^{-3}$  pour le manteau.
- Les courbes d'hypsonétrie ont été réalisées avec un pas d'élévation de 100 mètres.

### 2.7.3 Hypsonétrie de la Terre

#### Hypsonétrie globale

La bimodalité de la distribution hypsonétrique est visible sur la carte topographique (figure (2.22)). La figure (2.23) représente l'hypsonétrie globale de la Terre dans le cas où l'effet de charge des océans n'a pas été retiré. Le fait de prendre en compte l'effet de charge a pour conséquence de resserrer le pic océanique, mais ne modifie pas la structure bimodale de la distribution. Un mode correspond au plancher océanique et l'autre à la surface continentale. Chacun des deux modes de la distribution terrestre présente un pic qui traduit des zones de surface étendue et de variations topographiques relativement faibles au sein des continents (bassins continentaux) et des fonds océaniques (plaines abyssales). Le mode océanique s'interprète comme les variations topographiques découlant de la subsidence thermique de la lithosphère océanique liée à son refroidissement (variation de l'épaisseur thermique lithosphérique). Ce mode présente un étirement vers les plus faibles profondeurs du à la présence des plateaux océaniques liés à l'épaississement crustal (Head (1990)). Le mode continental est interprété comme résultant de la conjugaison des variations d'épaisseur crustale et des processus d'érosion qui tendent à ramener les élévations continentales au niveau de la mer (Head (1990)).

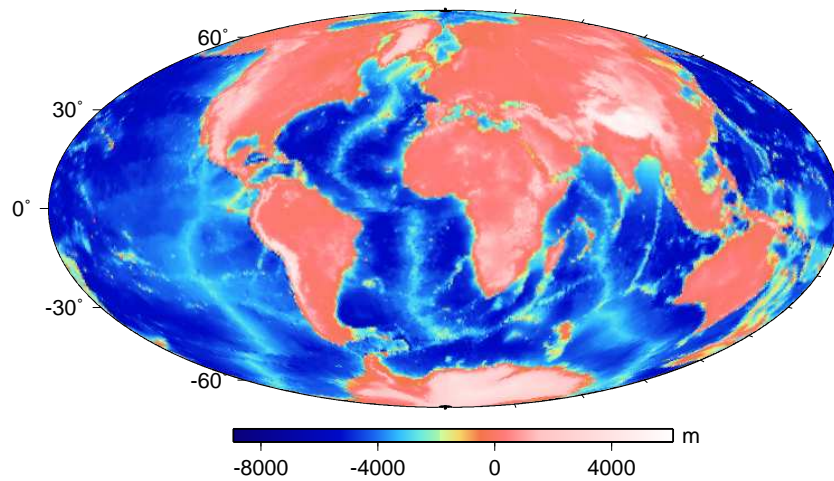


FIG. 2.22 – *Topographie terrestre.*

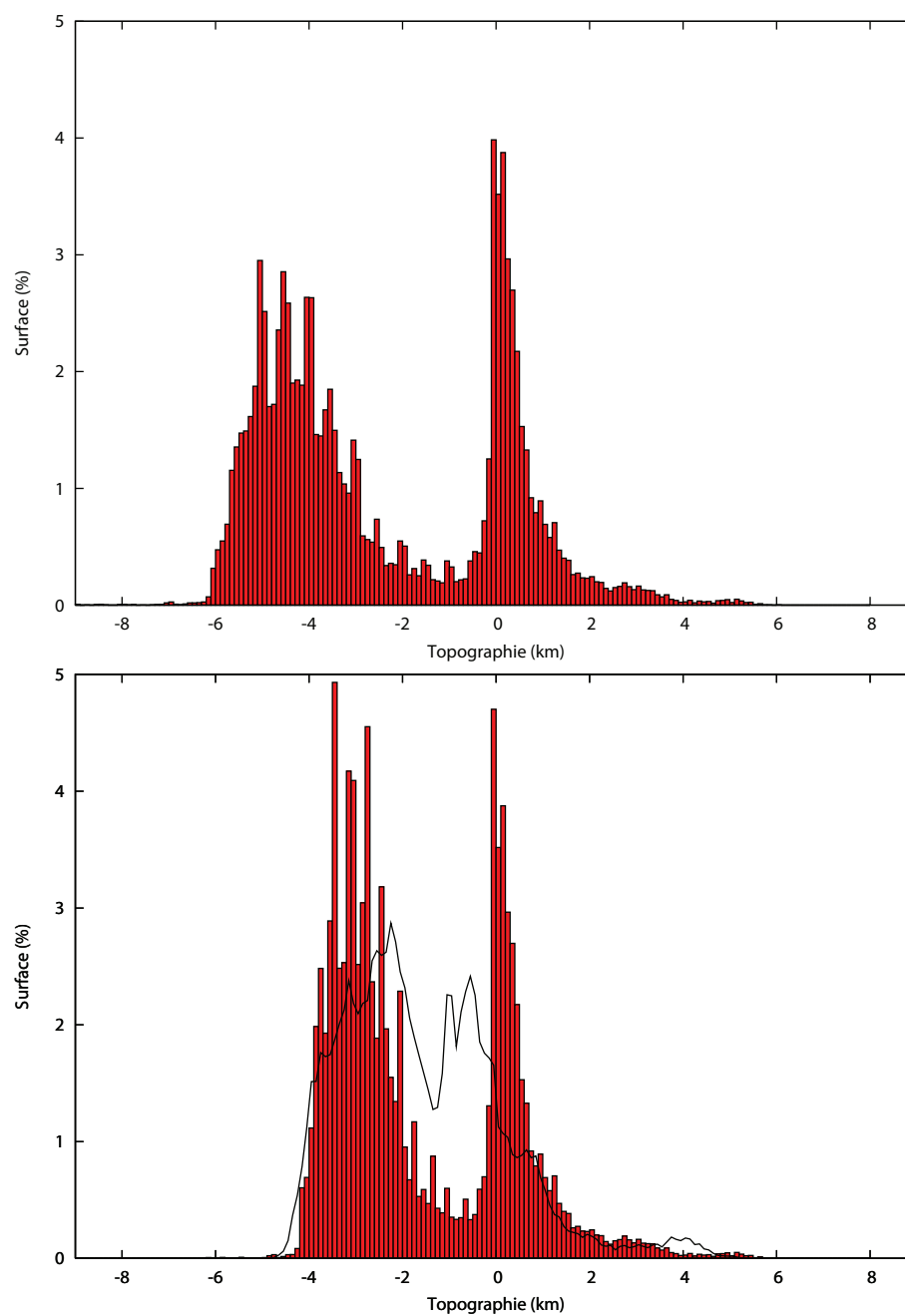


FIG. 2.23 – *Haut : distribution hypsométrique globale de la topographie de la Terre. Bas : la même distribution corrigée de l'effet de charge des océans. La ligne noire représente l'hypsométrie de la topographie dont le degré 1 a été retiré.*



### Hypsométrie cumulée

La dynamique terrestre est caractérisée notamment par le phénomène de la tectonique des plaques, qui se traduit, au niveau des dorsales, par l'expansion du plancher océanique. La remontée épisodique de matière issue du manteau génère la création de la croûte océanique qui s'étend alors de chaque côté des dorsales avant de disparaître dans le manteau au niveau des zones de subduction. Au fur et à mesure de son éloignement de la dorsale, la lithosphère se refroidit, ce qui entraîne une augmentation de sa densité et la subsidence par rapport au niveau des dorsales. Une loi mathématique décrit ce phénomène et permet de relier la profondeur du plancher océanique à la racine carrée de son âge (modèle de refroidissement demi-espace, Oldenburg (1975)).

La courbe d'hypsométrie cumulée, représentant la racine carrée de la surface cumulée par tranche d'élévation, présente un comportement linéaire dans le domaine compris entre -2 et -4 km, ce qui correspond à l'élévation du plancher océanique non subductant (figure (2.24)). Une régression linéaire permet d'obtenir les caractéristiques de ce domaine de linéarité (tableau (2.9) page 71). D'après Rosenblatt *et al.* (1994), la borne supérieure de ce domaine de linéarité est de -1950 mètres, ce qui correspond au niveau moyen corrigé des dorsales océaniques, c'est à dire à une épaisseur lithosphérique thermique nulle. Cette linéarité de la courbe d'hypsométrie cumulée semble donc caractériser le domaine océanique terrestre. C'est à partir de cette hypothèse que nous allons réaliser une étude similaire pour les cas de Vénus et de Mars.

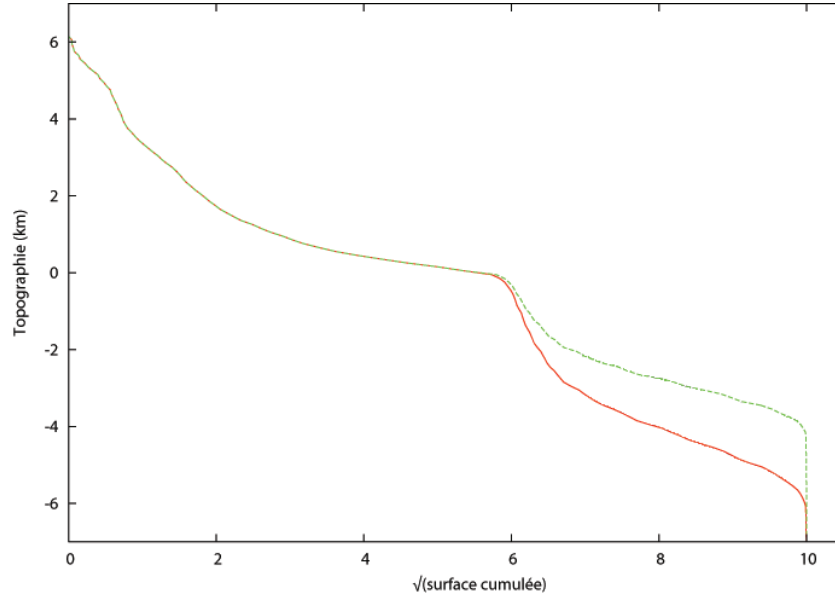
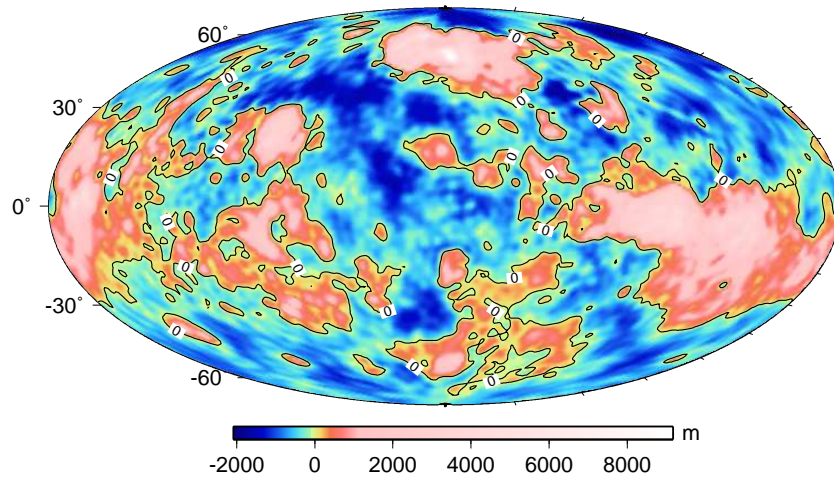


FIG. 2.24 – *Distribution hypsométrique cumulée de la topographie de la Terre corrigée de l'effet de charge des océans (pointillés).*

## 2.7.4 Hypsométrie de Vénus

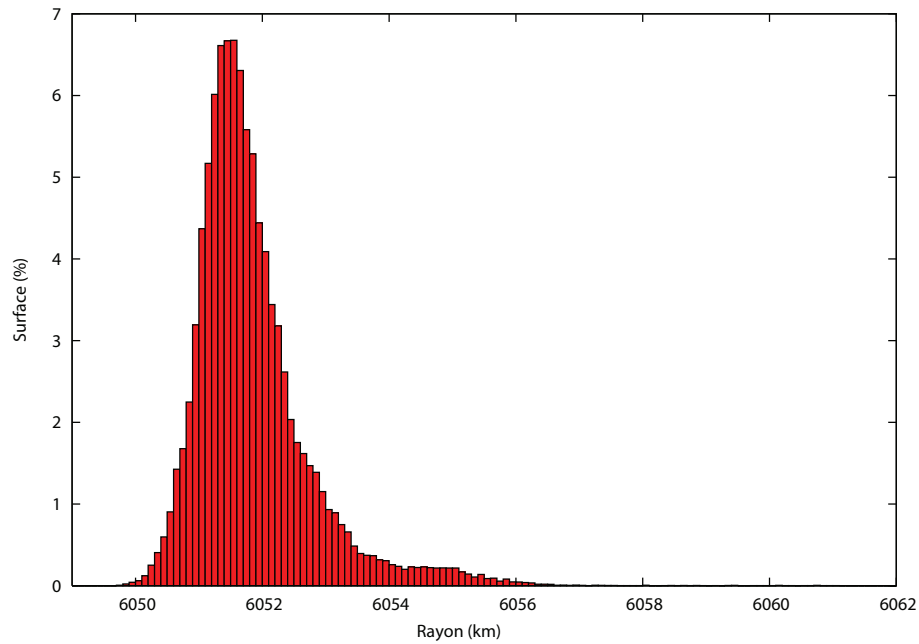
### Hypsométrie globale

La première couverture topographique assez complète de la surface vénusienne, effectuée par la sonde Pioneer-Venus (Masursky *et al.* (1980)), a permis d'obtenir la première distribution hypsométrique de la planète et de diviser la surface de Vénus en trois provinces : les lowlands (basses-terres), les Rolling Plains (plaines d'élévation modale) et les highlands (hautes-terres) (figure (2.25)). Les basses-terres ont une élévation inférieure au rayon moyen de la planète (6051 km), les Rolling Plains se situent entre 6051 et 6053 km et les hautes-terres au-dessus de 6053 km.

FIG. 2.25 – *Topographie de Vénus.*

La distribution hypsométrique globale de Vénus est unimodale (figure (2.26)), contrairement au cas de la Terre et correspond à la valeur du rayon de 6051,40 km. Cette différence a été interprétée comme la signature topographique de l'absence d'une tectonique des plaques sur Vénus (Masursky *et al.* (1980)). Cette interprétation est notamment basée sur le fait que la bimodalité terrestre est en partie liée à la différence d'élévation induite par les différences d'épaisseur et de densité des croûtes océanique et continentale. Or, la tectonique des plaques entretient cette bimodalité en créant continuellement de la croûte océanique, la croûte continentale se maintenant à la surface. Ainsi, l'unimodalité vénusienne suggère la présence d'un seul type de croûte et l'absence de tectonique des plaques à sa surface (Solomon *et al.* (1992)).

Remarque : La courbe d'hypsométrie globale sera la même pour la topographie et le rayon au centre de masse, car l'ellipsoïde de Vénus est défini à 6051,848 mètres (rayon de la sphère car la vitesse de rotation de Vénus est très lente).

FIG. 2.26 – *Distribution hypsométrique globale de la topographie de Vénus.*

### Hypsométrie cumulée

La figure (2.27) représente la courbe d'hypsométrie cumulée de Vénus. Celle-ci montre un domaine de linéarité qui couvre environ 75% de sa surface (tableau (2.9) page 71) et correspond aux plaines d'élévation modale. Les bornes inférieures et supérieures correspondent respectivement aux rayons planétaires de 6051 km et 6053,5 km (tableau (2.9)). La borne supérieure (6053,5 km) est proche de l'estimation théorique (6053 km) du niveau planétaire moyen de l'asténosphère affleurante obtenue en considérant un modèle d'isostasie thermique (Morgan et Phillips (1983)). D'après ce modèle, ce niveau correspond à une épaisseur lithosphérique nulle. En considérant les niveaux de référence de -1950 m pour la Terre et 6053,5 km pour Vénus, Rosenblatt *et al.* (1994) ont démontré que le pic de distribution vénusienne se superpose presque parfaitement au pic de distribution océanique terrestre. Cela ne signifie pas que la tectonique des plaques a eu lieu sur Vénus, mais que l'on peut faire l'hypothèse que le processus d'isostasie thermique, associé à une perte de chaleur interne par conduction à travers

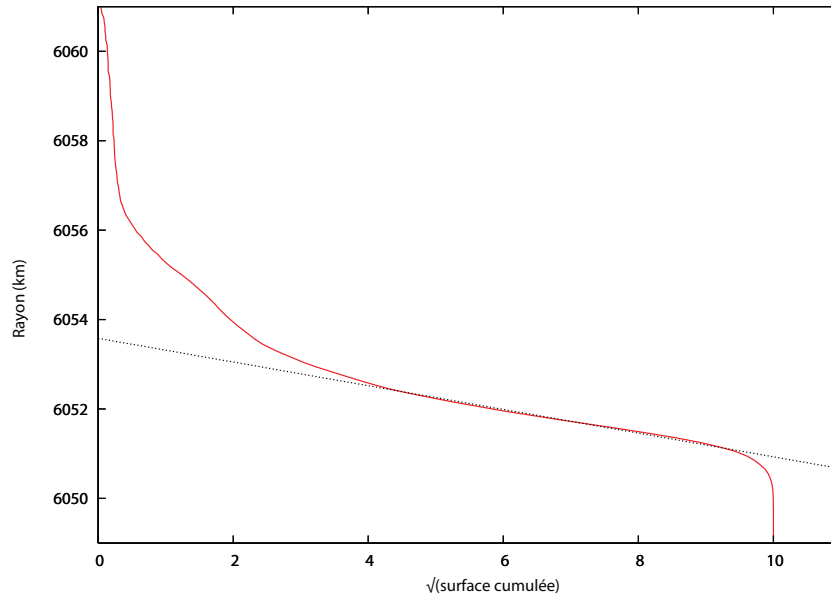


FIG. 2.27 – *Distribution hypsométrique cumulée de la topographie de Vénus.*

la lithosphère, opère sur les deux planètes.

### 2.7.5 Hypsométrie de Mars

#### Hypsométrie globale

Sur Mars, la courbe d'hypsométrie globale est également bimodale (figure (2.28)), ce qui reflète la dichotomie de la topographie entre l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud (figure (2.29)). Les zones géographiques correspondant aux deux pics sont représentées sur la figure (2.30) page 68. Le pic des basses plaines du Nord correspond à une topographie inférieure de 5,5 km par rapport à la topographie des hautes terres. Le pic est également plus fin, ce qui reflète le faible relief de l'hémisphère Nord. Le pic situé entre -6 et -7 km correspond au plancher du cratère Hellas.

Il est à noter que malgré une distribution bimodale, les distributions hypsométriques martienne et terrestre sont quelque peu différentes. Si l'on retire le degré 1 de la topographie (figure (2.29)), c'est à dire, si l'on se réfère au centre géométrique et non plus au centre de masse, la distribution hypsométrique martienne devient unimodale (Smith

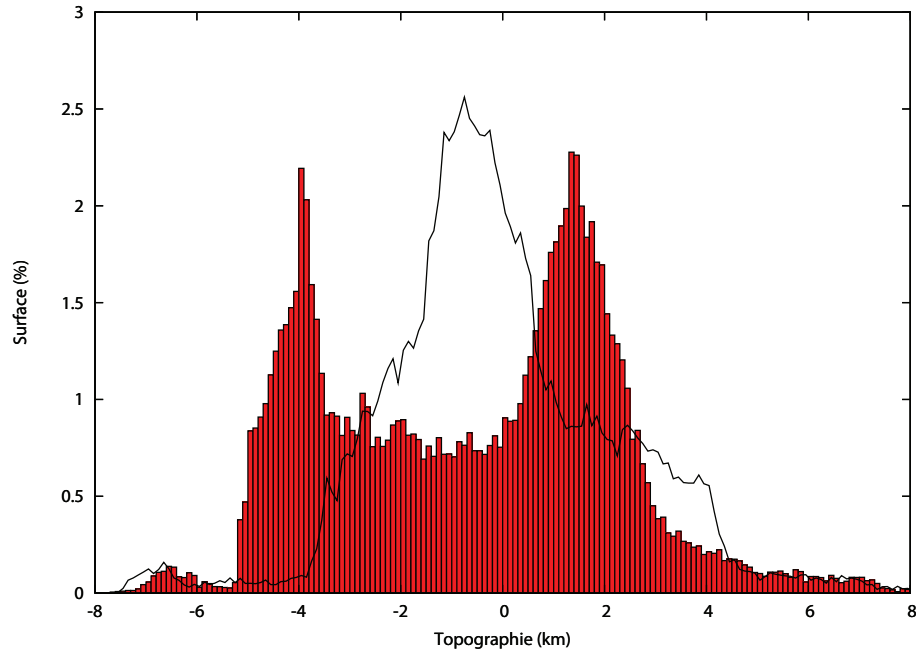


FIG. 2.28 – *Distribution hypsométrique globale de la topographie de Mars (histogramme). La ligne noire représente l'hypsométrie de la topographie dont le degré 1 a été retiré.*

*et al.* (1999b); Aharonson *et al.* (2001)), alors que celle de la Terre reste bimodale (figures (2.28), (2.29) et (2.23) page 60).

### Hypsométrie cumulée

La courbe d'hypsométrie cumulée est représentée sur la figure (2.31). Une première rupture de pente correspond à environ 50% de la surface cumulée et marque la différence entre les terrains de l'hémisphère Nord et ceux de l'hémisphère Sud. Plus curieusement, une seconde rupture de pente se situe dans le domaine topographique du 'Contact 2' ( $-3760 \pm 560\text{m}$ ) identifié par Parker *et al.* (1993) et Head *et al.* (1999) (figure (2.31)), qui correspond en partie à la ligne de rivage Deuteronilus. Bien que nous n'ayons pas d'interprétation à proposer pour cette rupture de pente, cela semble indicatif d'un processus externe ou interne de contrôle de la topographie.

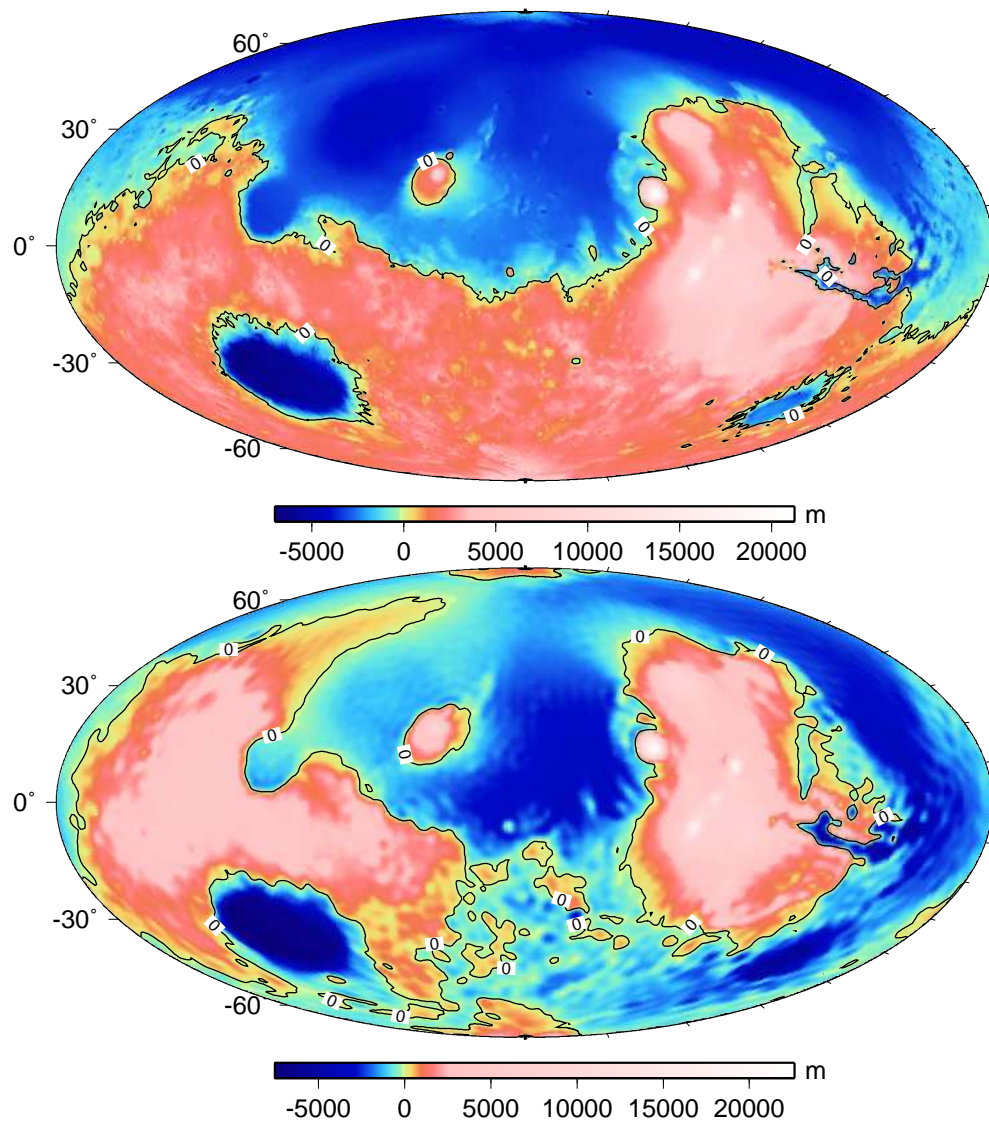


FIG. 2.29 – Topographie martienne. En bas, la même topographie dont le degré 1 a été retiré.



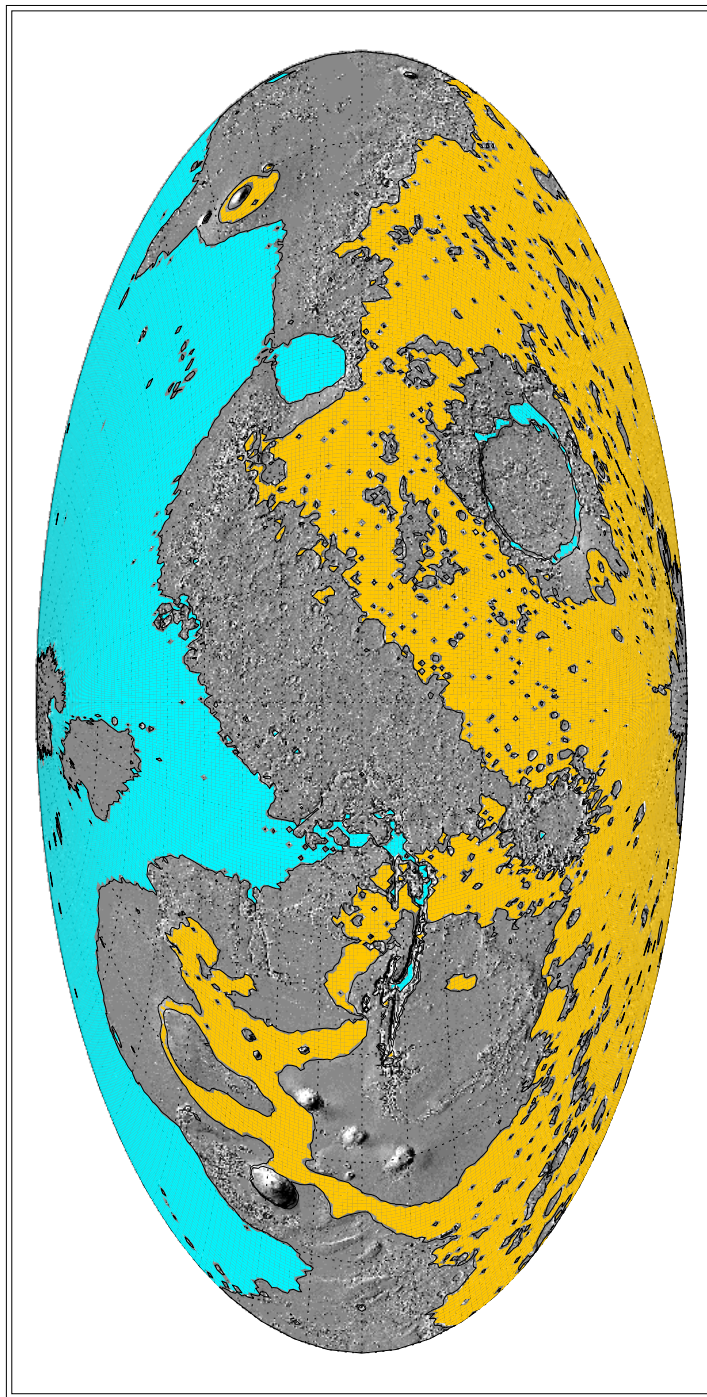


FIG. 2.30 – Localisation des zones modales de la courbe d'hypsométrie globale de la topographie de Mars représentée sur la figure 2.28. La zone bleue correspond aux limites -5000/-3500 m et la zone jaune aux limites 500/2500 m.



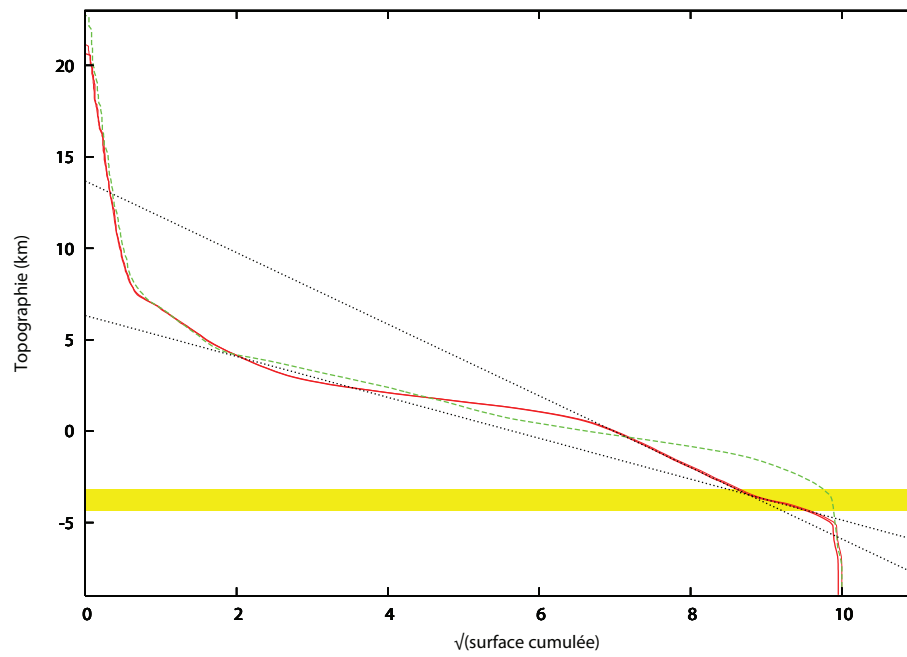


FIG. 2.31 – *Distribution hypsométrique cumulée de la topographie de Mars. Les droites soulignent les domaines de linéarité. En jaune : Limite topographique du Contact 2 identifié par Parker et al. (1993). Les domaines linéaires disparaissent si l'on retire le degré 1 de la topographie.*

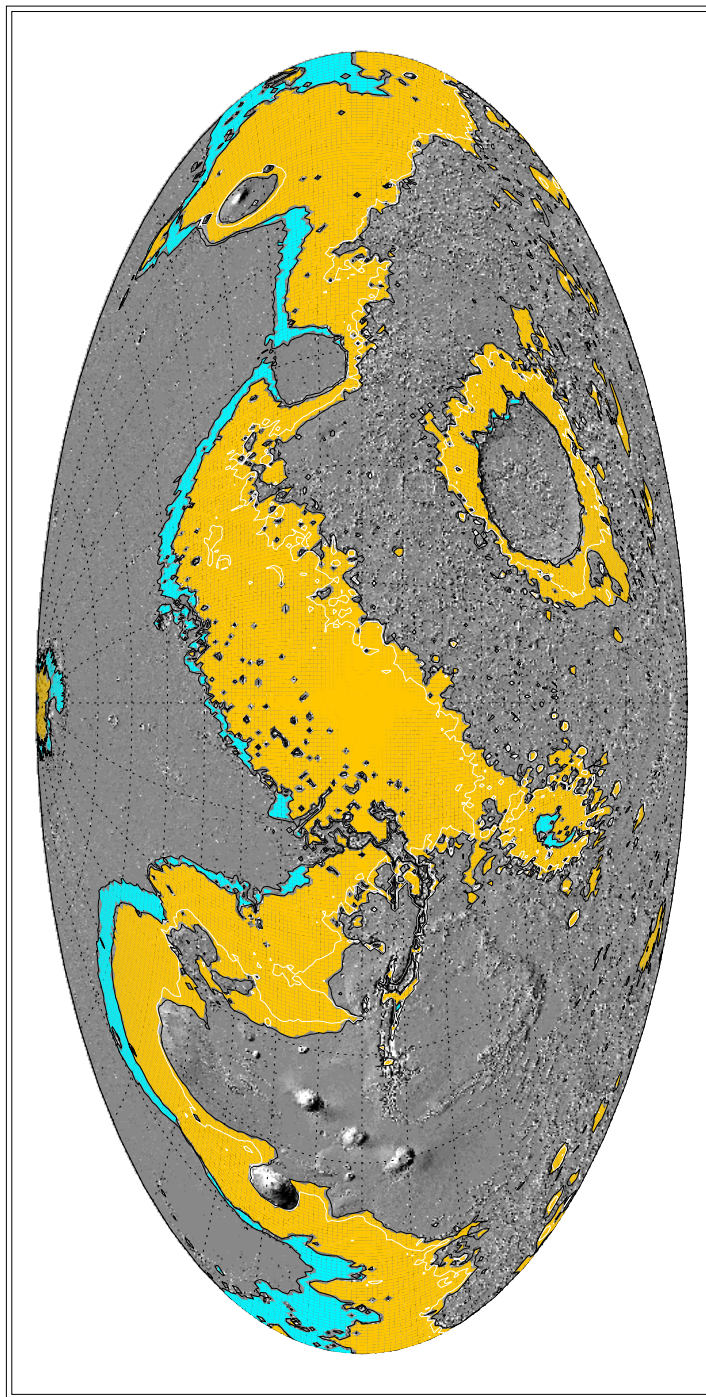


FIG. 2.32 – Localisation des deux domaines de linéarité identifiés sur la figure (2.31).  
 En jaune : le domaine de linéarité 1. En bleu : le domaine de linéarité 2. La ligne  
 blanche représente le niveau zéro de la topographie.

### 2.7.6 Conclusions

La méthode d'hypsométrie, et plus particulièrement l'hypsométrie cumulée, est un outil intéressant pour l'étude des planètes telluriques. En effet, dans le cas de la Terre, la présence d'un domaine linéaire dans la courbe d'hypsométrie cumulée traduit le phénomène de subsidence thermique de la lithosphère océanique. Dans le cas de Vénus, ce domaine semble être associé à des processus d'isostasie thermique. Dans le cas de Mars, le fait que les zones géographiques correspondant à ce domaine linéaire se situent dans la région supposée avoir accueilli un océan n'est sans doute pas une pure coïncidence et cela mérite de plus amples recherches.

Planète	pente	seuil supérieur	seuil inférieur	surf. dom. lin.
Terre	$-582 \pm 20$ m	$-1950 \pm 100$ m	$-3850 \pm 100$ m	$54.9 \pm 2$ %
Vénus	$-265 \pm 10$ m	$6052.7$ km $\pm 100$ m	$6051$ km $\pm 100$ m	$76.8 \pm 5$ %
Mars (1)	$-1936 \pm 30$ m	$150 \pm 100$ m	$-3750 \pm 100$ m	$31,8 \pm 3$ %
Mars (2)	$-1205 \pm 30$ m	$-3750 \pm 100$ m	$-4150 \pm 100$ m	$7,3 \pm 3$ %

TAB. 2.9 – *Paramètres de régression linéaire des courbes d'hypsométrie cumulée de la topographie des planètes telluriques.*

## 2.8 Conclusions du chapitre

Nous avons vu dans ce chapitre l'importance de l'interdisciplinarité dans l'étude de la planète Mars. En effet, les études géomorphologiques qui ont permis d'identifier de simples contacts géologiques comme des paléo-lignes de rivage ont permis d'initier des études géophysiques sur la nature et les informations que ces structures géologiques peuvent nous apporter. Les études spectrométriques sont venues étayer et confirmer notre hypothèse concernant l'histoire de ces lignes de rivage et leur place dans l'évolution morphologique de la planète, notamment lors de la formation de Tharsis au Noachien supérieur. Ce complexe volcanique est d'ailleurs la clé de la compréhension de la formation et de l'évolution de Mars. De nombreux auteurs se sont penchés sur ce problème dans le but d'expliquer le signal gravimétrique autour de Tharsis et de déterminer si un support dynamique interne pouvait être à l'origine de cette signature.

Dans le chapitre suivant, nous abordons le volet modélisation numérique de notre étude, pour tenter de relier quantitativement la dynamique interne d'une planète aux observables géophysiques de surface (topographie dynamique et géoïde). Nous y présentons l'outil numérique que nous avons développé, alliant la modélisation de la convection thermique en domaine sphérique 3D à la méthode spectrale basée sur les harmoniques sphériques.

# Chapitre 3

## Outils numériques

### 3.1 Convection thermique en domaine sphérique 3D

#### 3.1.1 Introduction

La description de la dynamique interne des planètes telluriques nécessite des outils numériques capables de reproduire la convection thermique en géométrie sphérique 3D. Cette géométrie est nécessaire non seulement pour mieux comprendre la dynamique (effet de courbure sur les instabilités thermiques, estimation du flux de chaleur) mais également pour comparer les résultats avec les observables géophysiques, naturellement exprimés sous forme d’harmoniques sphériques. De plus, ces outils doivent être capables de gérer de forts gradients de viscosité attendus pour des matériaux tels que les silicates des planètes telluriques ou les glaces des satellites des planètes géantes gazeuses.

L’un des premiers modèles prenant en compte une viscosité variable dans un domaine sphérique a été développé par Hsui *et al.* (1995) à partir d’une méthode aux éléments finis dans le cas isovisqueux (code *TERRA*) par Baumgardner (1985). Le premier code traitant de la convection thermique d’un fluide à viscosité variable en domaine sphérique est le code *CITCOMs* de Zhong *et al.* (2000) issu du code *CITCOM* de Moresi et Gurnis (1996).

Il est nécessaire d’utiliser des maillages non conformes pour prendre en compte le

problème de singularité au pôle. Récemment, trois modèles basés sur des formulations aux volumes finis ont été présentés (Kageyama et Sato (2004); Choblet (2005); Stemmer *et al.* (2006)), tous utilisant une nouvelle grille. Le premier modèle utilise la grille Yin Yang développée sur la base des coordonnées sphériques classiques, dont les pôles sont retirés et les deux autres utilisent la grille de la sphère cubique de Ronchi *et al.* (1996).

### 3.1.2 Modèle physique et rhéologie

Le taux de déformation dépend de la température  $T$ , de la pression  $P$ , de la taille de grain  $d$  et de la contrainte  $\sigma$  (Karato et Wu (1993)) :

$$\dot{\epsilon} = A \left( \frac{\sigma}{\mu} \right)^n \left( \frac{b}{d} \right)^m \exp \left( -\frac{E + PV}{RT} \right) \quad (3.1)$$

où  $A$  est le facteur pré-exponentiel,  $\mu$  le module de cisaillement,  $b$  le vecteur de Burgers,  $n$  le facteur exposant de la contrainte,  $m$  le facteur exposant de la taille de grain,  $E$  l'énergie d'activation,  $V$  le volume d'activation et  $R$  la constante des gaz parfaits.

La viscosité des roches présente une dépendance en température du type Arrhénius. Pour une déformation qui dépend linéairement de la contrainte (fluage par diffusion), la relation s'écrit :

$$\eta = \frac{\mu}{2A} \left( \frac{d}{B} \right)^m \exp \left( \frac{Q}{RT} \right) = b \exp \left( \frac{Q}{RT} \right) \quad (3.2)$$

où  $Q = E + pV$  est l'enthalpie d'activation, et  $b = \mu/(2A)(h/B)^m$  peut être vue dans nos modèles comme une constante.

Dans les modèles numériques de convection thermique, la dépendance de la viscosité en fonction de la température est traduite par une simple loi exponentielle :

$$\eta = b' \exp(-\gamma T) \quad (3.3)$$

où  $b'$  et  $\gamma$  sont des constantes dépendantes de la température interne.

Cette approximation de la loi d'Arrhénus est plus connue sous le nom d'approximation de Frank-Kamenetskii. Ceci traduit le fait qu'à forts contrastes de viscosité, les processus dynamiques majeurs se déroulent principalement dans le cœur isotherme où les deux lois coïncident si l'on choisit  $\gamma = Q/RT_i^2$  (où  $T_i$  est la température à la base du couvercle). La différence entre les deux lois de viscosité à la surface est alors négligée, dès lors qu'elle influence peu le transfert de chaleur (Reese *et al.* (1999)). Dans le cas du régime de couvercle et dans un cadre cartésien, les variations de viscosité les plus fortes se situent dans la couche limite thermique froide en surface. Si les lois sont correctement paramétrées, le transfert de chaleur ainsi que le flux sont peu affectés par cette différence dans la région conductive (Reese *et al.* (1999)).

Un autre point important concerne la contrainte dans le couvercle conducteur (là où les deux lois de viscosité diffèrent), sachant que cette contrainte est utilisée dans le calcul du géoïde et de la topographie dynamique. Une étude récente démontre que la distribution de la contrainte dans le couvercle est similaire pour les deux lois, excepté dans une fine couche sous la surface (Solomatov (2004)).

### 3.1.3 Nombres caractéristiques

*Nombre de Rayleigh.* Le nombre de Rayleigh en surface  $Ra$  paramétrise la vigueur de la convection : c'est le rapport entre les forces motrices du fluide (forces d'Archimède) et les termes de dissipation visqueuse et thermique.

Lorsque le fluide est chauffé par la base :

$$Ra = \frac{\alpha \rho_0 g \Delta T d^3}{\kappa \mu_0}$$

avec  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique,  $\rho_0$  la densité de référence,  $g$  l'accélération gravitationnelle,  $\Delta T$  le contraste de température,  $d$  l'"épaisseur" de la coquille,  $\kappa$  la diffusivité thermique et  $\mu_0$  la viscosité de référence.

*Nombre de Prandtl.* Le nombre de Prandtl  $Pr$  est le rapport du temps caractéristique de la diffusion thermique sur le temps caractéristique de la diffusion de la quantité de

mouvement :  $P_r = \nu/\kappa$ , où  $\kappa$  est la diffusivité thermique et  $\nu$  la viscosité dynamique :  $\nu = \mu/\rho$ . Il est d'autant plus élevé que la diffusion de la quantité de mouvement est plus efficace que la diffusion de la chaleur. Pour des valeurs de  $\mu$  et  $\kappa$  caractéristiques des silicates ( $\rho = 3300 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\mu = 10^{21} \text{ Pa.s}$  et  $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ), l'application numérique donne  $P_r = 3.10^{23}$ . Les expériences analogiques utilisent des fluides dont le nombre de Prandtl est nettement plus faible. Quant aux études numériques, elles imposent généralement un nombre de Prandtl infini.

*Nombre de Nusselt.* Le nombre de Nusselt  $Nu$  mesure l'efficacité de la convection. Ce nombre est le rapport du flux de chaleur en surface sur le flux obtenu dans le cas où la convection est absente (flux conductif) et pour une même différence de température entre la surface et la base.

$$Nu = \frac{q_s^* H}{k \delta T}$$

où  $q_s^*$  est le flux de chaleur en surface adimensionné. À l'équilibre thermique et pour un fluide chauffé par la base, le nombre de Nusselt en surface est en moyenne égal au nombre de Nusselt à la base.

### 3.1.4 Les équations de la convection

Le code numérique utilisé dans cette étude est un code de convection en domaine sphérique 3D développé par G. Choblet (Choblet (2005)). Il permet de résoudre les équations de conservation décrivant la convection thermique d'un fluide dont la viscosité dépend fortement de la température. Ces équations sont la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la chaleur.

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.4)$$

où  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{v}$  la vitesse du fluide et  $t$  le temps. L'approximation de Boussinesq est réalisée, c'est à dire que toutes les variations de densité autres que celles dues à



la dilatation thermique entrant dans le calcul de la force d'Archimède sont négligées (fluide incompressible). L'équation (3.4) devient alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.5)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (Navier-Stokes) s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{g}$  est la gravité et  $\sigma$  le tenseur des contraintes. Les termes inertiels sont négligés devant les forces de dissipation visqueuse (nombre de Prandtl est infini).

L'équation de conservation de la chaleur est :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) - k \nabla^2 T - \rho H = 0 \quad (3.7)$$

où  $T$  est la température,  $C_p$  la capacité calorifique,  $k$  la conductivité thermique et  $Q$  la production de chaleur interne. Elle fait le bilan des variations locales de densité volumique d'énergie en les répartissant en trois termes d'origine distincte : le transport de chaleur par conduction thermique, par convection thermique et la production interne de chaleur.

### Adimensionnement

Il y a trois intérêts majeurs à adimensionner le problème :

- les équations ainsi obtenues sont plus simples
- les quantités calculées étant normalisées, elles ne prennent pas de valeurs numériques trop fortes ou trop faibles (ce qui réduit les problèmes d'erreurs numériques)
- la solution calculée pour un jeu de nombres caractéristiques est valable pour tous les systèmes naturels ayant le même jeu de nombres caractéristiques (principe de similitude)

Les équations (3.5) (3.6) (3.7) adimensionnées deviennent :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3.8)$$

$$0 = -\nabla p^* + \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t) - Ra T \mathbf{r}. \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + h. \quad (3.10)$$

avec  $\mathbf{V}$  la vitesse,  $p^*$  la pression dynamique,  $\mu$  le coefficient de viscosité dynamique,  $T$  la température et les deux paramètres sans dimension  $Ra$  et  $h$ .

Les échelles caractéristiques sont :

temps :  $[t] = d^2/\kappa$ , proportionnel à la diffusivité thermique  $\kappa$

viscosité :  $[\mu] = \mu_0$ , viscosité associée à la température  $T_0$

longueur :  $[L] = d = r_t - r_b = r_t(1 - f)$ , épaisseur de la coquille (avec  $r_t$ , rayon externe,  $r_b$ , rayon interne et  $f = r_b/r_t$ )

L'expression adimensionnée du chauffage interne est  $h = Hd^2/k\Delta T$ .

Il faut noter que le fait d'être dans un domaine sphérique ne modifie en rien l'échelle caractéristique de la convection thermique. Cependant, vu qu'aucun paramètre sans dimension n'est introduit pour décrire la courbure, les longueurs adimensionnées (principalement  $r$ ) sont redimensionnées en utilisant  $d$  (et non le rayon externe) : le rayon sans dimension varie donc de  $r_b = f/(1 - f)$  à  $r_t = 1/(1 - f)$ ,  $f = r_b/r_t = r_c/a$  étant le rapport entre le rayon interne ( $r_c$ ) et externe ( $a$ , rayon de la planète), ou rapport d'aspect.

### 3.1.5 La sphère cubique

La discrétisation classique d'une sphère repose sur une grille latitude-longitude. Avec une telle grille, la convergence des méridiens entraîne une décroissance de la distance entre les points de grille, ce qui crée une singularité aux pôles (figure (3.1)) et engendre des termes non bornés dans les équations de conservation. Il est donc nécessaire de trouver une méthode de maillage de la sphère exempte de toute singularité.

La méthode de la sphère cubique (Ronchi *et al.* (1996)) a été développée dans le but de résoudre ce problème et de respecter les critères suivants :

- la discrétisation ne doit présenter aucune singularité
- la discrétisation doit préserver la forme générale des équations de la convection
- la grille ainsi définie doit se rapprocher au maximum d'une grille de points équidistants

Cette méthode repose sur la décomposition du domaine en six régions identiques obtenues par projection des faces d'un cube circonscrit sur une surface sphérique. La figure (3.2) illustre cette technique.

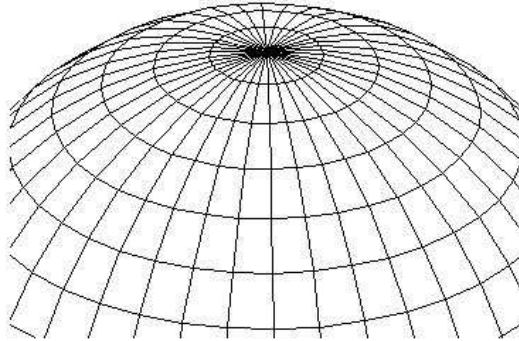


FIG. 3.1 – *Le 'problème au pôle' : la singularité engendrée par la convergence des méridien entraîne l'apparition de termes non-bornés dans les équations de conservation.*

Chacune des six unités ainsi définie ne possède aucune singularité, présente le même

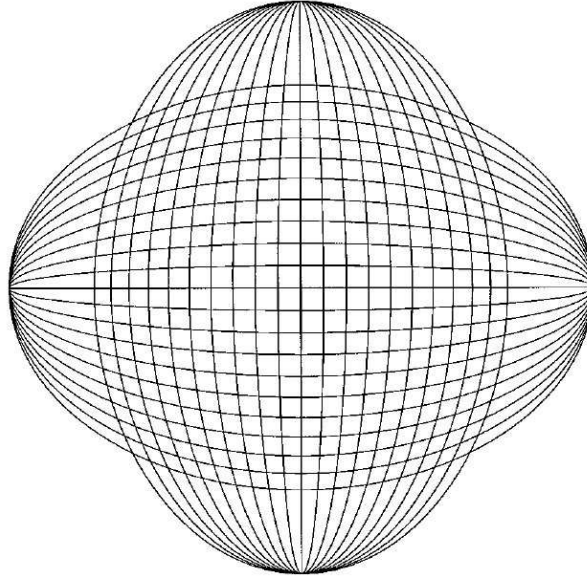


FIG. 3.2 – Construction d'un sixième de sphère par la méthode des Grands Cercles.

pas de discrétisation et permet la construction d'une grille quasi-uniforme. Il est important de noter que ce système n'est pas orthogonal, car seuls les grands cercles verticaux intersectent orthogonalement l'équateur (et les grands cercles à  $\eta$  constant, le méridien à  $\xi$  nul).

Le système est ainsi défini par les coordonnées suivantes (figure (3.3)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \tan \xi = \frac{y}{x} \\ Y = \tan \eta = \frac{z}{x} \\ \delta = 1 + X^2 + Y^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \\ C = \sqrt{1 + X^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ D = \sqrt{1 + Y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{z}{x}\right)^2} \end{array} \right.$$

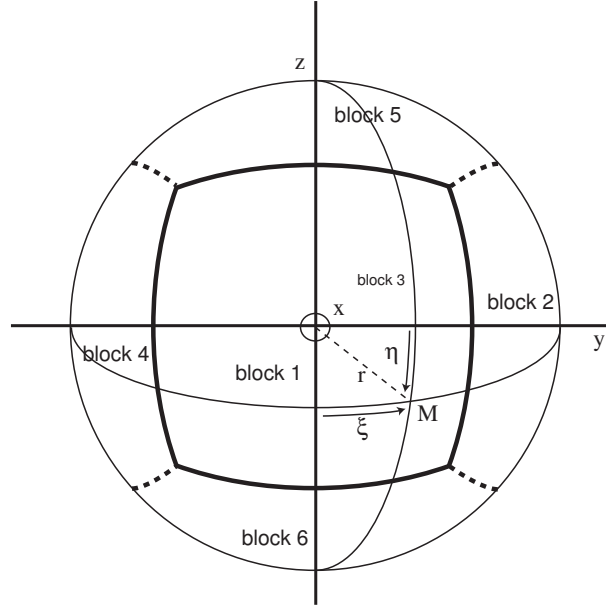


FIG. 3.3 – *Système de coordonnées de la sphère cubique. Le point  $M$  situé sur la sphère est localisé par les coordonnées angulaires  $\xi$  et  $\eta$  associées à deux grands cercles correspondant aux lignes verticale ( $\xi$ ) et horizontale ( $\eta$ ) à la surface.*

La technique de la sphère cubique repose donc sur l'intersection de deux séries de grands cercles espacés d'un incrément angulaire uniforme ( $\Delta\xi$  et  $\Delta\eta$ ) avec  $\xi$  et  $\eta$  compris entre  $-\pi/4$  et  $\pi/4$ . La grille est ensuite prolongée radialement entre les deux surfaces sphériques délimitant la coquille ( $r_b$ ) et ( $r_t$ ), en "empilant" les sphères concentriques de discrétisation angulaire identique, espacées d'un incrément radial  $\Delta r$  (figure (3.4)).

Il est à noter que si la grille associée à l'un des blocs présente  $N$  cellules dans les trois directions, la dimension azimutale est généralement plus grande que la direction radiale, en supposant que  $f$  n'est pas trop petit ( $(\pi/2(1-f))$  en haut et  $\pi f/2(1-f)$  en bas). C'est cette configuration qui sera employée par la suite, vu que les gradients radiaux jouent un rôle important dans la convection thermique. Le domaine courbe numérique est ainsi divisé en cellules non uniformes  $C_{ijk}$  ( $i, j, k$  correspondant respectivement aux indices dans les directions  $r-$ ,  $\xi-$ ,  $\eta-$ ).

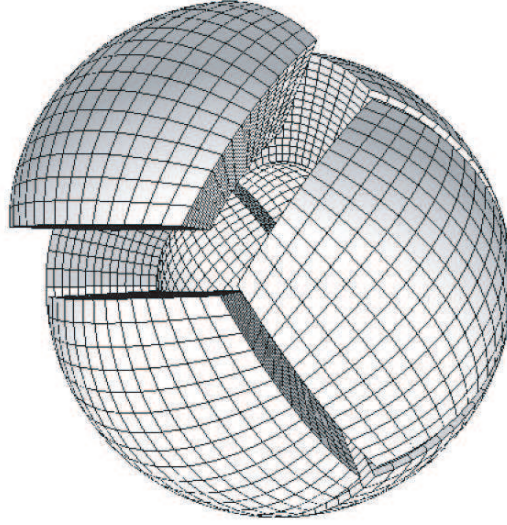


FIG. 3.4 – Représentation tri-dimensionnelle du maillage de la sphère-cubique.

### 3.1.6 Maillage entrelacé

La méthode du maillage entrelacé est utilisée (figure (3.5)) ainsi qu'un système de coordonnées contravariantes qui permet une meilleure évaluation des flux pour cette configuration (Choblet (2005)). Les coordonnées des blocs 2, 3 et 4 sont modifiées (figure (3.6)) : si il y a  $N$  cellules dans une direction donnée (par exemple la direction  $\xi$ ), il y a  $N + 1$  valeurs discrètes des coordonnées contravariantes du champ de vitesse  $V^\xi$  entre  $\xi = -\pi/4$  ( $V_{j=0}^\xi$ ) et  $\xi = \pi/4$  ( $V_{j=N+1}^\xi$ ). Ainsi,  $V_{j=1}^\xi$  sur le bloc 1 sera calculée à partir de la valeur  $V_{j=N+1}^\xi$  sur le bloc 0 (ainsi que la valeur  $V^\eta(\xi = \pi/4)$  sur le bloc 0, à cause de la non-orthogonalité). Pour que l'algorithme soit identique pour chaque bloc, il est nécessaire que les frontières entre chaque bloc possèdent les valeurs  $-\pi/4$  et  $\pi/4$  (alors qu'avec l'orientation classique proposée par Ronchi *et al.* (1996), la coordonnée  $\eta = \pi/4$  du bloc 1 coïncide avec la coordonnée  $\xi = \pi/4$  du bloc 4 ...). Les relations entre ce nouveau système de coordonnées et les coordonnées cartésiennes et sphériques sont regroupées dans le tableau (3.1).

La discrétisation du domaine par la méthode de la sphère cubique est telle que le calcul des paramètres à la frontière de deux blocs contigus est considérablement

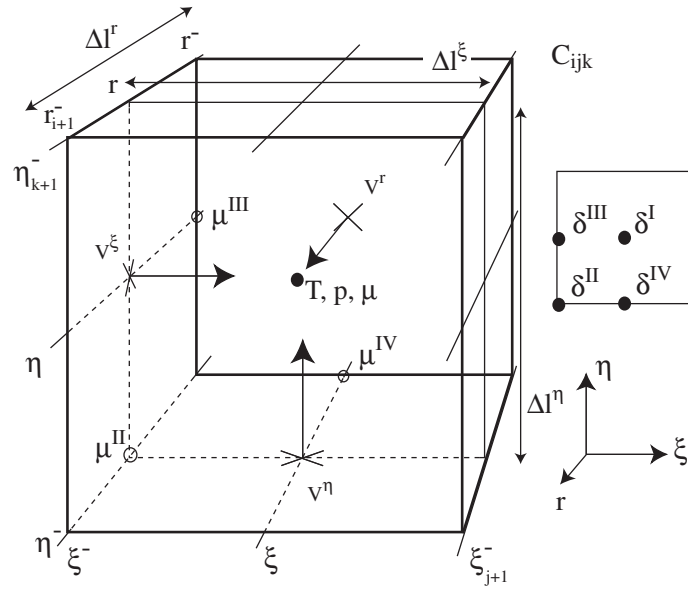


FIG. 3.5 – Positions et notations des coordonnées discrètes du système de la sphère cubique. Le point noir au centre de la cellule correspond à la position de la température, de la pression et de la viscosité. Les symboles  $X$  au centre des parois de la cellule indiquent la position des coordonnées de vitesse.

n° bloc	CS à cartésien	CS à sphérique	Cartésien et sphérique à CS	Matrice de passage
équateur 0 ( $x > 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \\ y = \frac{rX}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{rY}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi = X \\ \tan\theta = C/Y \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{y}{x} = \tan\phi \\ Y = \frac{z}{x} = 1/(\cos\phi\tan\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = -V_\eta + \frac{XY}{\sqrt{CD}}V_\xi \\ V_\phi = \frac{\sqrt{\delta}}{CD}V_\xi \end{cases}$
équateur 1 ( $y > 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{-rX}{\sqrt{\delta}} \\ y = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{rY}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi = -1/X \\ \tan\theta = C/Y \end{cases}$	$\begin{cases} X = -\frac{x}{y} = -1/\tan\phi \\ Y = \frac{z}{y} = 1/(\sin\phi\tan\theta) \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = -V_\eta + \frac{XY}{\sqrt{CD}}V_\xi \\ V_\phi = \frac{\sqrt{\delta}}{CD}V_\xi \end{cases}$
équateur 2 ( $x < 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{-r}{\sqrt{\delta}} \\ y = \frac{-rY}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{-rX}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi = Y \\ \tan\theta = D/X \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{z}{x} = 1/(\tan\theta\cos\phi) \\ Y = \frac{y}{x} = \tan\phi \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = V_\xi - \frac{XY}{\sqrt{CD}}V_\eta \\ V_\phi = \frac{\sqrt{\delta}}{CD}V_\eta \end{cases}$
équateur 3 ( $y < 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{rY}{\sqrt{\delta}} \\ y = \frac{-r}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{-rX}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi = Y \\ \tan\theta = D/X \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{z}{y} = 1/(\tan\theta\cos\phi) \\ Y = \frac{-x}{y} = \tan\phi \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = V_\xi - \frac{XY}{\sqrt{CD}}V_\eta \\ V_\phi = \frac{\sqrt{\delta}}{CD}V_\eta \end{cases}$
pôle nord 4 ( $z > 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{-rX}{\sqrt{\delta}} \\ y = \frac{-rY}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi = Y/X \\ \tan\theta = \sqrt{\delta-1} \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{-x}{z} = -\tan\theta\cos\phi \\ Y = \frac{-y}{z} = -\tan\theta\sin\phi \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = \frac{1}{\sqrt{\delta-1}}\left(\frac{Y}{C}V_\eta + \frac{X}{D}V_\xi\right) \\ V_\phi = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta-1}}\left(-\frac{X}{C}V_\eta + \frac{Y}{D}V_\xi\right) \end{cases}$
pôle sud 5 ( $z < 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{rY}{\sqrt{\delta}} \\ y = \frac{rX}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{-r}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi = Y/X \\ \tan\theta = \sqrt{\delta-1} \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{-y}{z} = -\tan\theta\sin\phi \\ Y = \frac{-x}{z} = -\tan\theta\cos\phi \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = -\frac{1}{\sqrt{\delta-1}}\left(\frac{Y}{C}V_\eta + \frac{X}{D}V_\xi\right) \\ V_\phi = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta-1}}\left(\frac{X}{C}V_\eta - \frac{Y}{D}V_\xi\right) \end{cases}$

TAB. 3.1 – *Le système de coordonnées modifiées de la sphère cubique.*



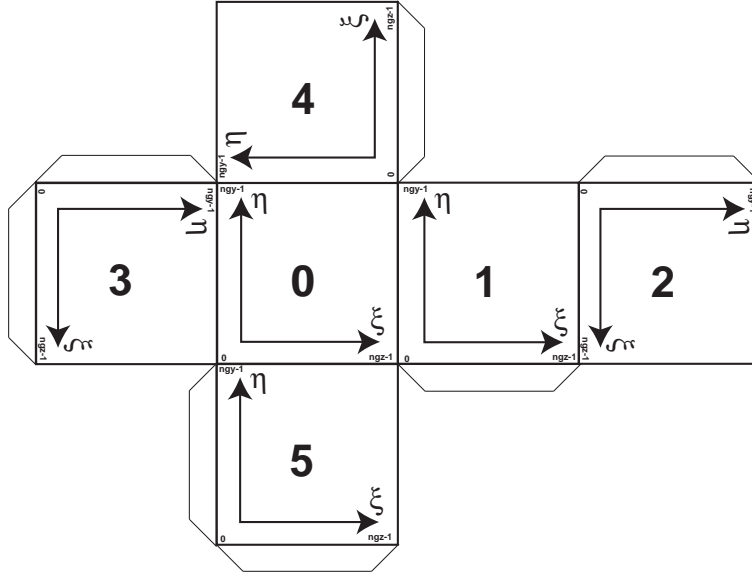


FIG. 3.6 – *Modification des coordonnées des blocs de la sphère cubique. La sphère est ici dépliée pour faciliter l'identification des différents blocs et leur système de coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  associé.*

simplifié : pour des paramètres scalaires tels que la température ou la pression, une simple interpolation 1D suffit (figure (3.7)). Pour des paramètres vectoriels comme la vitesse, il est nécessaire de réaliser un changement de repère. La direction des vecteurs  $\eta$  et  $\xi$  est en effet différente d'un bloc à l'autre.

Il est également important de noter que sur  $1/6^{\text{ème}}$  de sphère, la surface de l'élément élémentaire du maillage diffère si celui-ci se trouve au centre ou au bord du bloc. Cela est représenté par la figure (3.8). Il faudra donc en tenir compte pour le calcul de la température moyenne dans le code de convection.

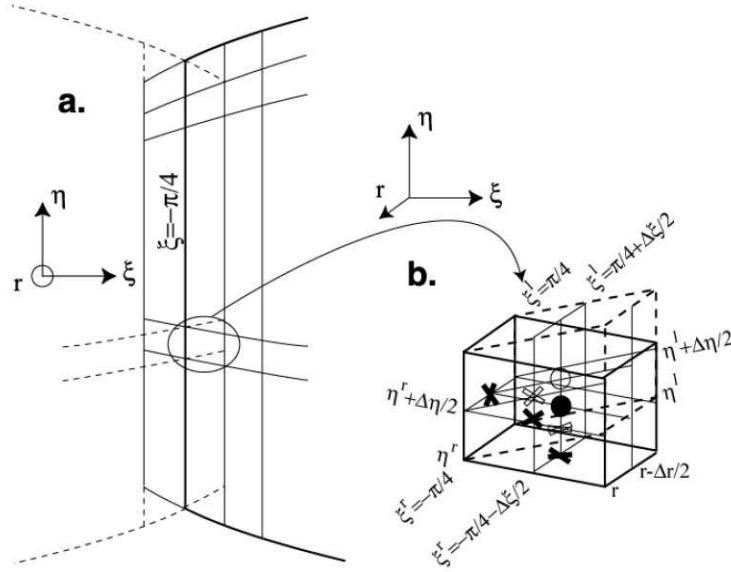


FIG. 3.7 – Interpolation entre deux blocs adjacents. (a) Configuration globale des lignes de coordonnées. Le bloc adjacent à la limite  $\xi = -\pi/4$  (ligne en pointillés) partage deux des coordonnées de la sphère cubique ( $r$  et  $\xi$ ), mais la coordonnée  $\eta$  ne coïncide pas sur les deux blocs. (b) Positions discrètes de la grille à la frontière : une simple interpolation 1D suffit pour transmettre les paramètres de température et de vitesses d'un bloc à l'autre. Les coordonnées de vitesses sont représentées par des croix et celles de la température par des sphères (pleines pour le bloc de droite, vides pour le bloc de gauche).

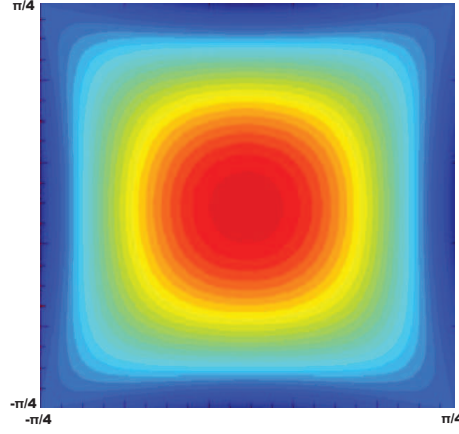


FIG. 3.8 – *Rapport de surface du maillage de la sphère cubique (normalisé à 1 au centre).*

### 3.1.7 Solver

Le solver de l'écoulement est découplé du traitement de l'équation de conservation d'énergie : le champ de vitesses calculé au temps  $(n)$  est utilisé pour l'advection dans le calcul de la température au temps  $(n + 1)$ . Les champs de pression et de vitesses sont recalculés simultanément à partir du nouveau champ de température pour calculer les forces de flottabilité et la viscosité. Nous utilisons un algorithme FAS-multigrilles V-cycles, une méthode de relaxation de type Gauss-Seidel, des opérateurs de transfert linéaire et des opérateurs de grille grossière sur toutes les grilles dérivées de la discrétisation de la grille fine (Choblet (2005)).

La non-orthogonalité entre  $\xi$  et  $\eta$  complique l'expression classique des opérateurs différentiels. L'expression exacte des équations discrètes correspondantes à (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14) est fournie dans Choblet (2005).

Dans le système de coordonnées de la sphère cubique, les équations (3.8) et (3.9) s'expriment de la manière suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} (r^2 V^r)_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r D C^2} \left( \frac{V^\xi}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D^2} \left( \frac{V^\eta}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} = 0 \quad (3.11)$$

selon  $r$  :

$$p_{,r} = \frac{1}{r^3} (r^3 \tau^{rr})_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r D C^2} \left( \frac{\tau^{r\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D^2} \left( \frac{\tau^{r\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} \quad (3.12)$$

selon  $\xi$  :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{XY}{D} p_{,\eta} + D p_{,\xi} \right) = \frac{1}{r^3} (r^3 \tau^{\xi r})_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r D C^2} \left( \frac{\tau^{\xi\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D} \left( \frac{\tau^{\xi\eta}}{D \delta^{1/2}} \right)_{,\eta} \quad (3.13)$$

selon  $\eta$  :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{XY}{C} p_{,\xi} + C p_{,\eta} \right) = \frac{1}{r^3} (r^3 \tau^{\eta r})_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D^2} \left( \frac{\tau^{\eta\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D} \left( \frac{\tau^{\eta\xi}}{C \delta^{1/2}} \right)_{,\xi} \quad (3.14)$$

où les composantes de la contrainte  $\tau^{\bullet\bullet}$  sont :

$$\tau^{rr} = 2\mu V_{,r}^r \quad (3.15)$$

$$\tau^{r\xi} = \mu \left[ r \left( \frac{V^\xi}{r} \right)_{,r} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^r + \frac{XY}{r D} V_{,\eta}^r \right] \quad (3.16)$$

$$\tau^{r\eta} = \mu \left[ r \left( \frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^r + \frac{XY}{r C} V_{,\xi}^r \right] \quad (3.17)$$

$$\tau^{\xi\xi} = 2\mu \left[ \frac{XY}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\xi}{D} \right)_{,\eta} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^\xi + \frac{C^2 D^2}{r \delta} V^r - \frac{C Y D^2}{r \delta} V^\eta \right] \quad (3.18)$$

$$\tau^{\xi\eta} = \mu \left[ \frac{C D}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\eta}{C} \right)_{,\xi} + \frac{C D}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\xi}{D} \right)_{,\eta} - \frac{X Y C D}{\delta} V_{,r}^r \right] \quad (3.19)$$

$$\tau^{\eta\eta} = 2\mu \left[ \frac{X Y}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\eta}{C} \right)_{,\xi} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^\eta + \frac{C^2 D^2}{r \delta} V^r - \frac{D X C^2}{r \delta} V^\xi \right] \quad (3.20)$$

### 3.1.8 Schéma d'advection-diffusion

L'équation décrivant la conservation d'énergie dans sa forme adimensionnée est la suivante :

$$\begin{aligned} \theta_{,t} + \theta_{,r} V^r + \frac{\delta}{rDC^2} \theta_{,\xi} V^\xi + \frac{\delta}{rCD^2} \theta_{,\eta} V^\eta = \\ \frac{1}{r^2} \left( r^2 \theta_{,r} \right)_{,r} + \frac{\delta}{r^2} \left[ \frac{\theta_{,\xi\xi}}{C^2} + \frac{\theta_{,\eta\eta}}{D^2} + \frac{2XY\theta_{,\xi\eta}}{C^2 D^2} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'inconvénient des méthodes reposant sur l'utilisation de grilles pour résoudre le problème de l'advection est que les schémas discrets fournissent généralement des solutions qui satisfont des équations aux dérivées partielles différentes de la simple équation du transport advectif ; cette équation modifiée induit par exemple des termes diffusifs pour un schéma d'ordre 1. De plus, dans le cas d'un système de coordonnées non-orthogonales, cette diffusion numérique est anisotrope : pour le système de la sphère cubique, celle-ci est plus importante selon les directions  $\xi$  et  $\eta$  (Hernlund et Tackley (2003)). Pour résoudre ce problème (et pour réduire la partie isotrope de la diffusion numérique), plusieurs schémas d'advection ont été testés :

- la méthode classique *Upwind* ou Amont, qui produit beaucoup de diffusion numérique, est utilisée comme schéma d'advection de référence
- la méthode *MPDATA*, utilisée dans plusieurs programmes de simulation de la convection thermique dans un domaine cartésien (étude de la dynamique du manteau, Tackley (1994))
- la méthode *Van Leer*, utilisée plus communément dans le domaine des fluides compressibles (Van Leer (1979)).

Nous utiliserons la méthode *Van Leer* (avec MC limiter pente 1) qui se révèle être assez simple et relativement efficace.

### 3.1.9 Parallélisme

La résolution des équations de la convection thermique nécessite une puissance de calcul conséquente qu'un processeur seul ne peut fournir. La solution souvent employée consiste à diviser le problème étudié en plusieurs parties et résoudre chacune de ces fractions du problème en même temps. Si  $n$  tâches, demandant chacune un temps d'exécution  $T_1$ , sont exécutées séquentiellement sur un seul processeur, le temps total de calcul est égal à  $nT_1$ . Si ces  $n$  tâches sont effectuées en même temps sur  $n$  processeurs différents, le temps de calcul est égal à  $T_1$ . Le calcul parallèle est la base même de cette idée : plusieurs processeurs effectuant simultanément de manière coopérative un calcul ou un travail bien précis. Dans notre cas, chaque sixième de sphère est décomposé en  $N_r \times N_\eta \times N_\xi$  volumes élémentaires correspondant à autant de processus auxquels un processeur est assigné.

Concrètement, le calcul parallèle s'effectue à l'aide de machines composées de plusieurs processeurs, appelées machines parallèles. Ces machines peuvent être classées en plusieurs catégories, en fonction notamment de leur type de mémoire : dans une machine à mémoire partagée, tous les processeurs partagent la même mémoire. Lorsque l'un des processeurs a terminé d'accéder à une partie de la mémoire, les autres processeurs peuvent à leur tour y accéder. À l'inverse, les processeurs d'une machine à mémoire distribuée possèdent chacun leur propre mémoire. Les données présentes sur la mémoire attachée à un processeur ne sont donc pas directement accessibles aux autres processeurs. Lorsqu'un processeur a terminé un calcul et en a écrit le résultat sur sa mémoire, il doit communiquer ce résultat au travers d'un réseau très haut débit reliant les différents processeurs. Un avantage de cette architecture est son coût relativement moindre comparé à celui d'une machine conçue autour d'une mémoire partagée et comportant le même nombre de processeurs. En effet, pour les noeuds d'une telle machine, les constructeurs utilisent généralement des processeurs du commerce et lui ajoutent une mémoire standard. Du même coup, ils réduisent leur investissement logiciel puisque les compilateurs performants sont disponibles pour ce type de processeurs.

Reste bien sûr à leur charge la conception d'un réseau de communication assez rapide pour relier au mieux les noeuds de calcul.

S'il est possible de réduire le nombre de communications ou de se contenter d'une efficacité parallèle moyenne, des stations de travail, reliées entre elles par des liaisons Ethernet classiques, peuvent constituer une machine parallèle de base. Ces clusters de processeurs présentent également l'intérêt de pouvoir évoluer facilement et sans surcoût en fonction des besoins de l'utilisateur. Il est ainsi facile de rajouter des noeuds supplémentaires sans dégrader les performances de la machine globale.

Dans le cadre de notre étude, afin de stocker les données nécessaires au schéma discret non disponibles sur la grille locale, des plans tampons sont ajoutés dans chaque direction (figure (3.9)). Dans la direction  $r$ , le processeur  $(I,J,K)$  envoie ses données

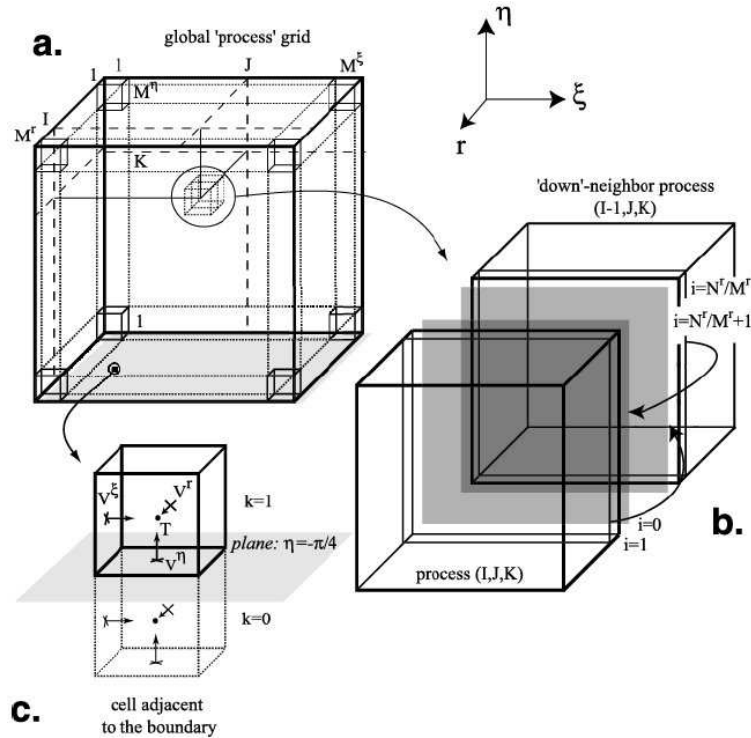


FIG. 3.9 – Méthode des plans tampons : les données nécessaires aux processeurs sont stockées localement.

locales dans le plan  $i = 1$  du processeur 'aval' et dans le plan  $i = N_r/M_r$  du processeur 'amont'. Il reçoit ensuite les données du processeur 'aval' pour remplir le plan  $i = 0$  et les données du processeur 'amont' pour remplir le plan  $i = N_r/M_r + 1$ . Ce processus est ensuite répété dans les directions  $\eta$  et  $\xi$ .

Chaque sixième de sphère doit communiquer ses données frontières au sixième de sphère qui lui est contigu (figure (3.10)). Les flèches représentent les communications nécessaires aux frontières respectives des six blocs de la sphère. Cette figure regroupe deux niveaux de communications : la communication à l'échelle locale (entre processeurs, dans un même bloc) et à l'échelle globale (entre 2 blocs contigus).

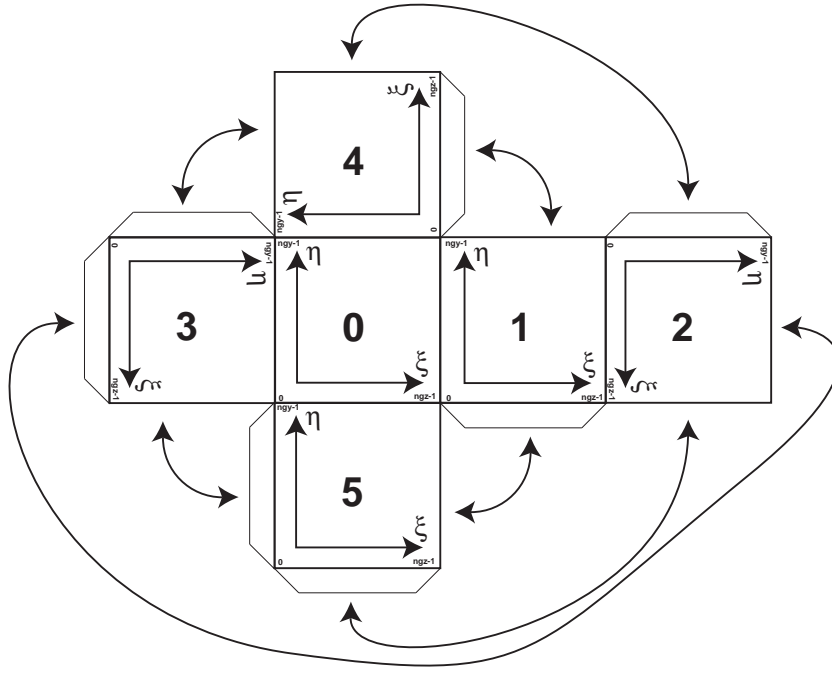


FIG. 3.10 – Représentation schématique de la communication inter-blocs dans le système de la sphère cubique.



### 3.1.10 Soumissions des travaux

Les calculs numériques ont été réalisés grâce aux ressources informatiques du Centre de Calcul Intensif des Pays de la Loire et du Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur. Le CCIPL est implanté sur le campus de la Faculté des Sciences de Nantes et constitue un centre régional de calcul parallèle de taille intermédiaire, destiné à faire le lien entre les moyens de calcul locaux des laboratoires et ceux des grands centres nationaux. Le CINES, basé à Montpellier, met à disposition de la communauté scientifique plusieurs clusters qui peuvent regrouper jusqu'à 1024 processeurs.

L'outil de soumission des travaux (JOBS) est LSF (Load Sharing Facilities). Les travaux émis sont distribués en files (QUEUES) suivant leurs caractéristiques : principalement le nombre de processeurs demandés et la consommation de calcul prévue.

Les cinq queues disponibles au CCIPL sont les suivantes :

- *Développement* : Affiliée à 4 processeurs, disponible pour un run d'une durée de 1 heure maximum.
- *9T12* : Affiliée à 9 processeurs (maximum 12), disponible pour un run d'une durée de 12 heures maximum.
- *9T72* : Affiliée à 9 processeurs (maximum 13), disponible pour un run d'une durée de 72 heures maximum.
- *2T72* : Affiliée à 2 processeurs (maximum 4), disponible pour un run d'une durée de 72 heures maximum.
- *16T24* : Affiliée à 16 processeurs (maximum 16), disponible pour un run d'une durée de 24 heures maximum.

Le nombre de processeurs disponibles au CCIPL étant limité, nous avons opté pour la méthode suivante : lancer des runs sur un bloc avec une grille de  $64^3$  et 2 processeurs par direction  $r, \eta, \xi$ . Une fois l'état stationnaire atteint, nous repartons de ces résultats pour lancer des runs sur une grille  $6 \times 64^3$  au CINES, en conservant 2 processeurs par direction, soit 48 au total.

Un exemple d'évolution temporelle des vitesses et de la température moyenne est représenté sur la figure (3.11). Pour ce cas, la convergence est atteinte après 70 heures de calcul. Pour les cas à viscosité variable, il est nécessaire de procéder par étape et d'augmenter progressivement le contraste de viscosité afin d'éviter la divergence du code. La dernière étape consiste à vérifier qu'un état stationnaire est atteint, en analysant les valeurs des vitesses  $V_r, V_\eta, V_\xi$  et de la température moyenne.

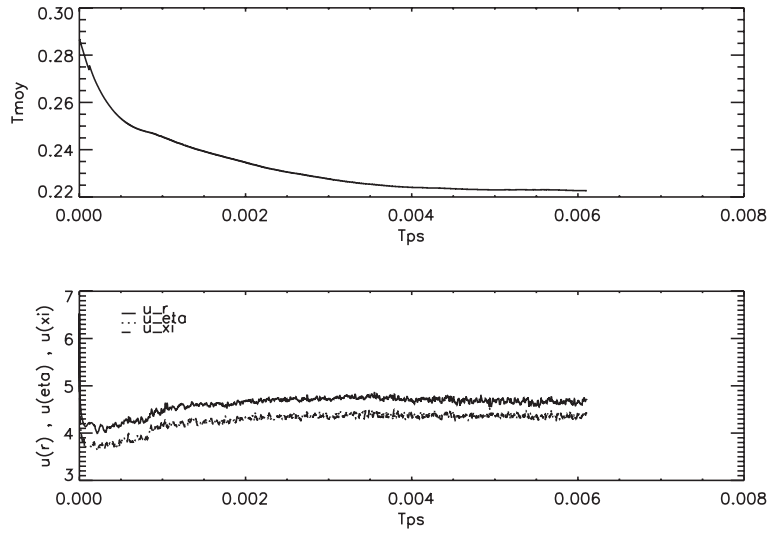


FIG. 3.11 – Exemple d'évolution temporelle des vitesses et de la température moyenne.

## 3.2 Geoïde et topographie dynamique

Dans cette partie, nous présentons les relations mathématiques entre les contraintes issues du flux mantellique et les observables géophysiques de surface que sont la topographie dynamique et le géoïde. Nous verrons en premier lieu les équations regroupant les paramètres physiques dimensionnés (identifiés par des tildés) puis nous réécrivons ces mêmes équations sous la forme adimensionnée.

### 3.2.1 Équations

La convection mantellique est dominée par les forces de flottabilité principalement induites par des anomalies thermiques. Les zones du manteau relativement froides ou chaudes donnent ainsi naissance au flux mantellique, essentiellement contrôlé par la structure densitaire et la rhéologie du manteau. La contrainte issue de ce flux agit sur les différentes frontières du manteau (surface, noyau-manteau) en les déformant (figure (3.12)). La forme de cette topographie dynamique ainsi que son amplitude, fournissent des informations concernant la structure de la planète, le flux mantellique à travers les différentes interfaces et la longueur d'onde caractéristique de la convection mantellique (Schubert *et al.* (2001)). Des informations importantes sont également contenues dans le géoïde qui correspond à l'addition des signaux gravitaires issus des hétérogénéités dans le manteau et de la déformation des interfaces (Ricard *et al.* (1984); Hager et Clayton (1989); King (1995)). La modélisation de la composante à grande longueur d'onde nécessite l'intégration des anomalies de masse sur toute la sphère et ne peut être réalisée qu'en géométrie sphérique. Cette intégration est considérablement simplifiée si les anomalies de densité et les topographies dynamiques sont exprimées sous la forme d'harmoniques sphériques (Burša et Pěč (1993)).

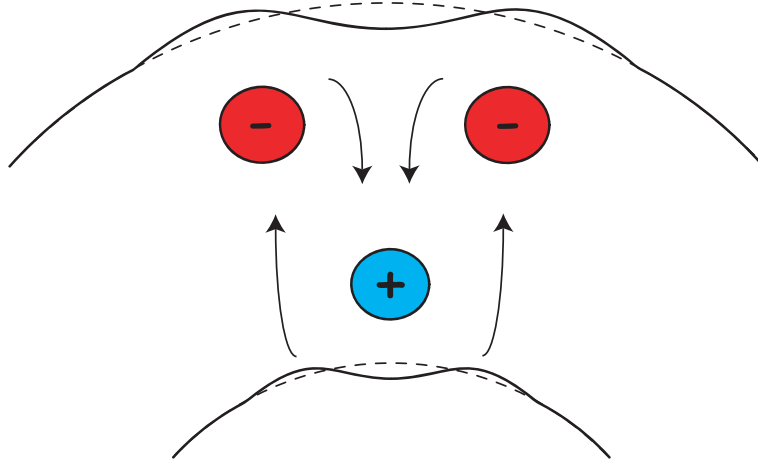


FIG. 3.12 – *Flux mantelliques induits par des anomalies de masses positives (bleu) et négatives (rouge). Les mouvements de matière engendrés déforment à la fois la surface et la limite noyau-manteau.*

La déviation  $\tilde{t}_S$  d'une surface déformée par rapport à une forme sphérique,

$$\tilde{t}_s(\theta, \phi) = \tilde{r}_s(\theta, \phi) - \tilde{r}_t \quad (3.22)$$

où  $\tilde{r}_S$  est le rayon de la surface d'un point de coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$  et  $\tilde{r}_t$  le rayon moyen de la planète, peut être obtenue à partir de l'équation d'équilibre des forces radiales agissant sur la surface. Au premier ordre, nous pouvons écrire :

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t) = -\rho_0 g \tilde{t}_S(\theta, \phi) \quad (3.23)$$

où  $\tilde{\sigma}_{rr}$  est la composante radiale de la force de traction sur une limite sphérique de rayon  $\tilde{r}_t$ ,

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) = -\tilde{p}^*(\tilde{r}_t, \theta, \phi) + 2\tilde{\mu}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) \left[ \frac{\partial \tilde{V}^r(\tilde{r}, \theta, \phi)}{\partial \tilde{r}} \right]_{\tilde{r}=\tilde{r}_t} \quad (3.24)$$

$\bar{\sigma}_{rr}$  est sa valeur moyenne,

$$\bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.25)$$

et  $g$  est l'accélération gravitationnelle, ici supposée constante.

Une équation d'équilibre similaire à celle utilisée pour la surface peut être écrite pour la CMB. Si l'on néglige les forces agissant dans le noyau, il est possible d'exprimer la topographie  $\tilde{t}_c$  de la manière suivante :

$$\tilde{t}_c(\theta, \phi) = \frac{\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b, \theta, \phi) - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b)}{\Delta\rho_c g} \quad (3.26)$$

où  $\Delta\rho_c$  est le saut de densité à la CMB.

Les anomalies du potentiel de gravité  $\tilde{U}$  induites par la convection thermique dans le manteau résultent d'une contribution multiple des topographies  $\tilde{t}_s$ ,  $\tilde{t}_c$  et du signal gravimétrique induit par les anomalies de densité dans le manteau. En utilisant les expressions du potentiel de gravité ainsi que les équations (3.23) et (3.26), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\tilde{r}, \theta, \phi) &= -\frac{G\tilde{r}_t^2}{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t)}{\tilde{d}(\tilde{r}_t, \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &+ \frac{G\tilde{r}_b^2}{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b)}{\tilde{d}(\tilde{r}_b, \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &+ G \int_{\tilde{r}_b}^{\tilde{r}_t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta\tilde{\rho}(\tilde{r}', \theta', \phi')}{\tilde{d}(\tilde{r}', \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)} \tilde{r}'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr' \end{aligned} \quad (3.27)$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle,  $\Delta\tilde{\rho}$  les anomalies de densité dans le manteau et  $\tilde{d}(\tilde{r}', \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)$  la distance entre les points  $(\tilde{r}', \theta', \phi')$  et  $(\tilde{r}, \theta, \phi)$ . Si le potentiel  $\tilde{U}$  est connu, il est possible de déterminer la hauteur du géoïde :

$$\tilde{N}(\theta, \phi) = \tilde{U}(\tilde{r}_t, \theta, \phi)/g \quad (3.28)$$

La composante radiale de la contrainte et les champs de densité utilisés pour le calcul du géoïde et de la topographie sont obtenus à partir des résultats du modèle de convection thermique avec les relations suivantes :  $\tilde{\sigma}_{rr} = (\mu_0\kappa/d^2)\sigma_{rr}$ . La topographie de surface adimensionnée s'exprime de la manière suivante :

$$t_s(\theta, \phi) = \frac{\tilde{t}_s}{d} = -\frac{1}{S} (\sigma_{rr}(r_t, \theta, \phi) - \bar{\sigma}_{rr}(r_t)) \quad (3.29)$$

où le paramètre sans dimension  $S = Ra/(\alpha\Delta T) = (\rho_0 g d^3)/(\kappa\mu_0)$  est introduit.

La version adimensionnée de l'équation (3.27) est alors :

$$\begin{aligned}
U(r, \theta, \phi) = & -\frac{r_t^2}{Ra} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma_{rr}(r_t, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(r_t)}{d(r_t, \theta', \phi' | r, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
& + \frac{r_b^2}{Ra} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma_{rr}(r_b, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(r_b)}{d(r_b, \theta', \phi' | r, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
& - \int_{r_b}^{r_t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{T(r', \theta', \phi')}{d(r', \theta', \phi' | r, \theta, \phi)} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'
\end{aligned} \tag{3.30}$$

La hauteur adimensionnée du géoïde est alors :

$$N(\theta, \phi) = \frac{\tilde{N}}{d} = G_r U(r_t, \theta, \phi) \tag{3.31}$$

où  $G_r = G\rho_0\alpha\Delta Td/g$  est le second paramètre sans dimension introduit.

### 3.2.2 Méthode spectrale

La détermination de la topographie dynamique de surface (équation (3.23)) nécessite de connaître la composante verticale de la contrainte  $\sigma_{rr}$  à la surface à partir de l'équation (3.24) (calculée directement sur la grille sphère-cubique présentée en section 3.1.5 page 79). La topographie de surface est exprimée sous la forme d'harmoniques sphériques.

Par la suite, nous utiliserons la base des harmoniques sphériques complexes  $\{Y_{\ell m}\}$  qui est orthonormale sur la sphère :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{\ell_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{\ell_2 m_2}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \tag{3.32}$$

où l'astérisque correspond au complexe conjugué et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $=1$  si  $i=j$ ,  $0$  sinon).

L'amplitude  $t_s$  de la topographie dynamique au point  $\{\theta, \phi\}$  peut être exprimée de la manière suivante :

$$t_s(\theta, \phi) = \sum_{\ell=1}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (t_s)_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{3.33}$$

où  $\ell_{max}$  est le degré maximum considéré et  $(t_s)_{\ell m}$  sont les coefficients d'harmoniques sphériques de degré  $\ell$  et d'ordre  $m$ ,

$$(t_s)_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t_s(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.34)$$

(Varshalovich *et al.* (1988); Jones (1985)). Si  $t_s$  est donnée sur des points discrets  $\{\theta_i, \phi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^g$ , l'intégrale de l'équation (3.34) peut être remplacée par une somme et les coefficients  $(t_s)_{\ell m}$  peuvent être déterminés en utilisant la formule suivante :

$$(t_s)_{\ell m} = \sum_{i=1}^{N^g} t_s(\theta_i, \phi_i) Y_{\ell m}^*(\theta_i, \phi_i) \Delta s_i \quad (3.35)$$

où  $\Delta s_i$  est la surface correspondante au  $i$ -ème point, normalisée telle que  $\sum_{i=1}^N \Delta s_i = 4\pi$ . L'équation (3.29) se réduit donc à :

$$(t_s)_{\ell m} = -\frac{(\sigma_{rr}^s)_{\ell m}}{S} \quad (3.36)$$

L'intégrale de l'équation (3.33) est réalisée du degré 1 au degré  $\ell_{max}$ . Le terme de degré nul correspond à la valeur moyenne de  $t_s$  sur la sphère et est, par définition, nul. Le choix du degré maximum  $\ell_{max}$  dans l'équation (3.33) dépend de la densité de la grille utilisée. Sachant que seules les harmoniques sphériques dont la demi-longueur d'onde est supérieure à la taille du plus grand pas de grille peuvent être déterminées,  $\ell_{max}$  doit satisfaire la condition :

$$\ell_{max} < \frac{\pi \tilde{r}_t}{\max_i \{\lambda_i\}} \quad (3.37)$$

où  $\lambda_i$  est le pas de la grille.

Le calcul du géoïde (équation (3.28)), nécessite la détermination des intégrales de l'équation (3.30) pour le potentiel de gravité. L'intégration est généralement réalisée dans le domaine spectral. Les quantités sont exprimées sous forme d'harmoniques sphériques :

$$X(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} X_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (3.38)$$

où  $X$  représente  $U$ ,  $T$  et  $\sigma_{rr} - \bar{\sigma}_{rr}$ , déterminés sur les deux interfaces.

Les termes de degré nul ne sont pas inclus dans la sommation, vu que nous supposons que les quantités considérées représentent des déviations par rapport à une valeur moyenne. En remplaçant l'équation (3.38) dans l'équation (3.30), en utilisant le théorème de l'addition (Burša et Pěč (1993)) et en faisant appel à la propriété d'orthonormalité (3.32), nous obtenons :

$$U_{\ell m}(r) = \frac{4\pi r}{2\ell + 1} \left[ -\frac{(\sigma_{rr}^s)_{\ell m}}{Ra} \left(\frac{r_t}{r}\right)^{\ell+2} + \frac{(\sigma_{rr}^c)_{\ell m}}{Ra} \left(\frac{r_b}{r}\right)^{\ell+2} - \int_{r_b}^{r_t} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell+2} T_{\ell m}(r') dr' \right] \quad (3.39)$$

où  $U_{\ell m}$  sont les coefficients des harmoniques sphériques du potentiel de gravité externe ( $r \geq r_t$ ). Les coefficients des harmoniques sphériques du géoïde, équation (3.28), sont :

$$N_{\ell m} = G_r U_{\ell m}(r_t) \quad (3.40)$$

## 3.3 Visualisation des résultats

### 3.3.1 Data Explorer

Data Explorer est un outil de visualisation de données utilisé dans des domaines de recherche tels que les sciences de la Terre, la mécanique ou la médecine. Développé au départ par la firme IBM en 1991, cet outil a aujourd'hui été intégré au projet OpenDX. IBM a en effet décidé de rendre public les sources du code afin d'élargir le domaine d'application de Data Explorer et de faire bénéficier au plus grand nombre d'un outil personnalisable et adapté à leurs attentes. Ce logiciel devant être utilisé par un grand nombre de personnes, n'ayant souvent pas de connaissance en programmation, l'utilisation en a été considérablement simplifiée grâce à une interface graphique claire, une utilisation intuitive et une installation possible sur un grand nombre de plateformes (Unix, Linux, Windows...).



### 3.3.2 Architecture du logiciel

L'utilisation de Data Explorer repose sur un certain nombre de commandes représentées par des blocs (figure (3.13)). Dans cet exemple, la structure du programme est articulée autour de trois commandes principales *Import*, *Plot* et *Image*. La commande *Import* fait appel à un fichier qui regroupe plusieurs informations comme le nom du fichier de données, la taille de la grille, l'organisation des données (ligne, colonne), le nom de chaque paramètre, la structure (vecteur, scalaire) et le type (entier, réel). La commande *Plot* contient les noms des variables à représenter et la commande *Image* correspond à la fenêtre graphique dans laquelle le résultat apparaît.

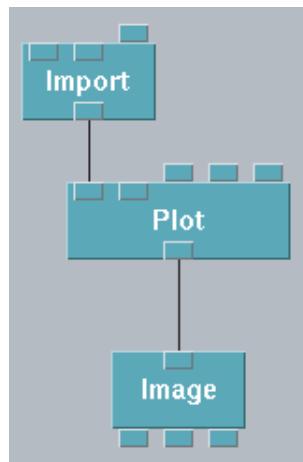


FIG. 3.13 – Architecture de base de Data Explorer.

#### Visualisation d'isosurface

Dans notre cas, nous souhaitons visualiser les champs de température dans le domaine sphérique 3D. Pour cela, nous disposons de la commande *Isosurface* qui permet de spécifier la valeur de la température à représenter (figure (3.14)). Dans cet exemple les blocs *Import* correspondent au six fichiers contenant chacun le champ de température d'un sixième de sphère.

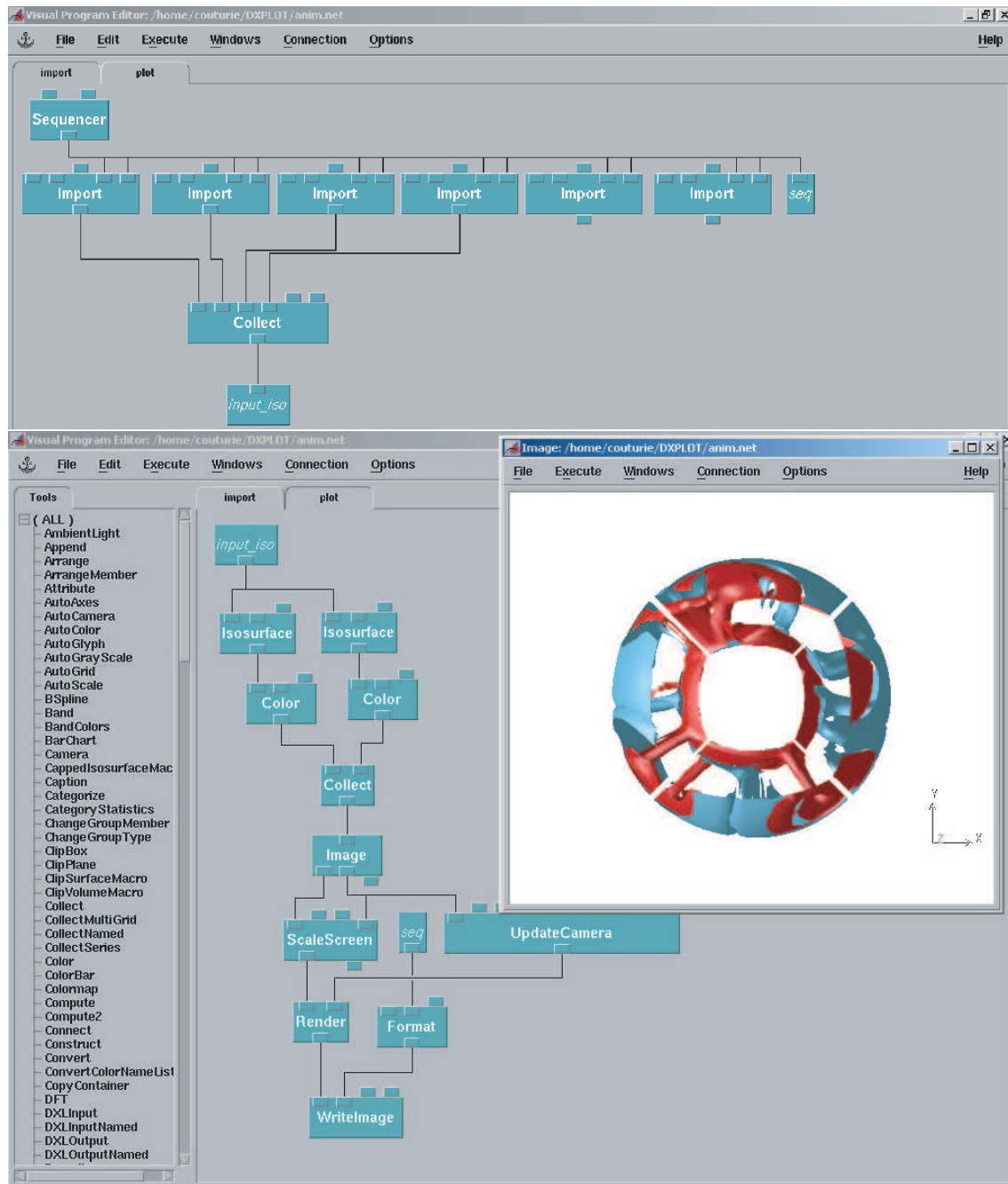


FIG. 3.14 – Exemple de fenêtre graphique sous Data Explorer.

### Animations

Il est également possible de réaliser des animations montrant l'évolution du champ de température dans le domaine sphérique 3D, si l'on possède la valeur du champ de température à différents pas de temps. Les commandes principales pour réaliser cela sont *Sequencer* et *WriteImage* (figure (3.14)). La commande *Sequencer* permet de répéter l'exécution du programme autant de fois qu'il est nécessaire (i.e le nombre de champs de températures disponibles). À chaque exécution, l'image du nouveau champ de température est automatiquement sauvee grâce à la commande *WriteImage*. Une fois que toutes les images souhaitées ont été créées, la série d'image est convertie en un fichier .gif par la commande *convert -delay 10 -resize 100% diapo\*.tiff film.gif* du logiciel *ImageMagick*, où l'option *delay* permet de spécifier l'écart de temps entre deux images successives et *resize* de redimensionner chaque image. Vient ensuite le nom des images originales et le nom du fichier final.

## 3.4 Conclusions du chapitre

Nous avons présenté dans ce chapitre un nouvel outil numérique issu de l'association de la simulation de la convection thermique en domaine sphérique tri-dimensionnel et de la méthode spectrale, basée sur l'utilisation d'harmoniques sphériques. Nous avons montré qu'il est possible de relier la contrainte verticale et le champ de température aux observables de surface que sont la topographie dynamique et le géoïde. De plus, l'adimensionnement des équations a permis de définir deux nouveaux nombres sans dimension caractéristiques de notre étude.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats obtenus pour différents modes de convection (nombre de Rayleigh, contraste de viscosité et chauffage interne), afin d'estimer, notamment, l'impact de ces paramètres sur l'amplitude et la forme des spectres de puissance de la topographie et du géoïde.



# Chapitre 4

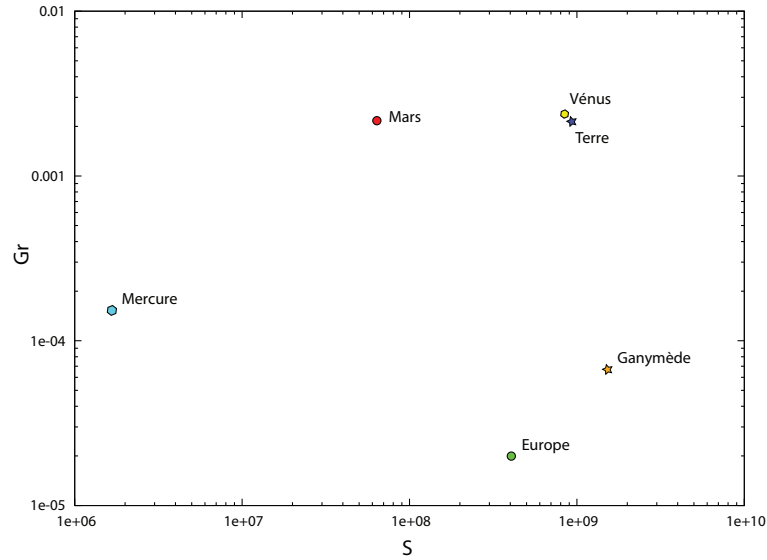
## Topographie dynamique et géoïde

### 4.1 Applications

Les calculs ont été réalisés avec des valeurs de  $S/Ra=20$  et  $G_r = 10^{-3}$ . Ces valeurs sont issues de l'estimation des gammes admissibles pour les objets du système solaire (cf. tableau (4.1)). L'interprétation physique des paramètres  $S$  et  $G_r$  reste délicate, mais nous pouvons noter que les extrema de  $S$  et  $G_r$  ne sont pas associés aux mêmes corps. La valeur minimale de  $S$  est associée à Mercure (manteau silicaté très 'fin') et la valeur maximale est associée à Ganymède (croûte glacée 'épaisse'). En revanche, la valeur minimale de  $G_r$  est associée à Europe (croûte de glace fine) et la valeur maximale à Venus (manteau silicaté épais). Afin d'évaluer l'influence des différents paramètres en jeu, nous avons sélectionné un nombre limité de cas de la convection thermique. Une première série comprend les cas à viscosité constante. Une seconde partie concerne les cas à viscosité fonction de la température. Une dernière section regroupe les cas où le chauffage volumétrique est ajouté à la viscosité variable (tableau (4.2)).

La topographie dynamique de surface est déterminée à partir de la contrainte verticale sur la grille de la sphère cubique. Le code détermine ensuite les coefficients des harmoniques sphériques (jusqu'au degré 30) pour enfin dresser la carte de topographie dynamique sur une grille latitude/longitude.

	Europe	Ganymède	Mercure	Vénus
$\rho_0$ ( $kg.m^{-3}$ )	1000	1000	3500	3500
$g$ ( $m.s^{-2}$ )	1.5	1.5	3	10
$d$ (m)	$3.10^4$	$10^5$	$5.10^5$	$3.10^6$
$\tilde{r}_t$ (m)	$1.5 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^6$	$6.10^6$
$\kappa$ ( $m^2.s^{-1}$ )	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
$\mu_0$ (Pa.s)	$10^{14}$	$10^{15}$	$10^{21}$	$10^{21}$
$\alpha$ ( $K^{-1}$ )	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\Delta T$ (K)	150	150	500	3000
$S$	$\sim 4.10^8$	$\sim 10^9$	$\sim 10^6$	$\sim 10^9$
$G_r$	$\sim 2.10^{-5}$	$\sim 7.10^{-5}$	$\sim 2.10^{-4}$	$\sim 2.10^{-3}$
$Ra_i$	$\sim 6.10^6$	$\sim 2.10^7$	$\sim 7.10^3$	$\sim 3.10^7$
$f$	0.98	0.96	0.8	0.5



TAB. 4.1 – Haut : estimation des valeurs des paramètres sans dimension  $S$  et  $G_r$  et des caractéristiques de plusieurs corps du système solaire. Les valeurs surlignées correspondent aux extrema de  $S$  et  $G_r$ . Bas : classement des différents corps du système solaire basé sur les nombres sans dimension  $S$  et  $G_r$ .

cas	Ra	$\gamma$	$H/(1-f)$	$Nu_{BOT}.f^2$	$Nu_{TOP}$	grille	$Ra_i$	$T_{moy}$
1	$2 \cdot 10^3$	-	-	2,131	2,133	$6.32^3$	-	0,26
2	$1 \cdot 10^7$	-	-	14,81	14,75	$6.64^3$	-	0,26
3	$3 \cdot 10^3$	8	-	5,447	5,413	$6.32^3$	$6,4 \cdot 10^4$	0,37
4	$1 \cdot 10^3$	15	-	10,83	10,78	$6.64^3$	$4,7 \cdot 10^7$	0,72
5	$1 \cdot 10^3$	15	10	9,985	13,18	$6.64^3$	$6,1 \cdot 10^7$	0,73

TAB. 4.2 – *Liste des cas présentés avec leurs paramètres adimensionnés : nombre de Rayleigh (Ra), contraste de viscosité ( $\gamma$ ), chauffage volumétrique (H), nombre de Nusselt Nu, taille de la grille et nombre de Rayleigh interne ( $Ra_i$ ).*

#### Notes

- le rapport d'aspect  $f = r_b/r_t$  est fixé à 0,5.
- les conditions limites sont bords-rigides en surface et bords-libres à la base.
- pour améliorer la lisibilité des champs 3D de température, les sixièmes de sphère polaires ont été retirés.

Les cas à viscosité constante ne sont présentés ici qu'à titre d'exemple pour permettre une comparaison avec les cas à viscosité variable puis avec chauffage interne. Une viscosité constante surestime la topographie de surface et le géoïde : King (1997) a en effet démontré que les profils issus de plumes se formant dans un fluide à viscosité dépendante de la température sont réduits d'un facteur deux par rapport aux profils obtenus pour un milieu à viscosité constante.

## 4.2 Premiers résultats

### 4.2.1 Nombre de Nusselt

Nous avons vu dans le paragraphe 3.1.3 page 75 que le nombre de Nusselt mesure l'efficacité de la convection et correspond au rapport du flux de chaleur en surface sur le flux obtenu dans le cas où la convection est absente (flux conductif). Pour un fluide chauffé par la base, lorsque l'équilibre thermique est atteint, le nombre de Nusselt en surface est égal au nombre de Nusselt à la base, ce qui est vérifié pour les cas 1 à 4.

Lorsque le chauffage volumétrique est ajouté au chauffage par la base, le flux de chaleur induit va s'ajouter au flux basal principal, ce qui conduit à un Nusselt de surface supérieur au Nusselt à la base. C'est ce que l'on constate pour le cas n° 5 qui correspond à un chauffage volumétrique adimensionné de 10, soit une contribution de 25 % au flux total de surface. Le nombre de Nusselt de surface s'obtient à partir de la valeur du nombre de Nusselt à la base et du chauffage interne (relation de conservation globale :  $Nu_{TOP} = Nu_{BOT} \cdot f^2 + (1 + f + f^2)h/3$ ).

### 4.2.2 Profils de température

Pour une coquille sphérique, la surface  $S_1$  de la limite inférieure est plus petite que la surface  $S_2$  de la limite supérieure, ce qui modifie les relations valables dans le domaine cartésien. En supposant qu'à l'état stationnaire, les nombres de Rayleigh locaux associés aux couches limites thermiques du haut et du bas sont égaux, Vangelov et Jarvis (1994); Jarvis (1995)) sont arrivés aux relations suivantes :

$$\frac{S_1}{S_2} = f^2; T_{moy} = \frac{1}{1 + f^{-3/2}} \text{ (Vangelov et Jarvis (1994); Jarvis (1995))}.$$

qui correspondent au rapport des surfaces et à la température moyenne.

Pour un rapport d'aspect de 0,5 et un cas isovisqueux chauffé par la base, la température moyenne sera donc de 0.26, ce qui est proche de la température moyenne observée sur le profil de température du cas n° 2 (figure (4.1)).



L'augmentation du contraste de viscosité va entraîner l'apparition d'un couvercle conductif : la viscosité de surface est si forte que la convection n'agit plus et le seul processus d'évacuation de la chaleur est alors la conduction. La présence de ce couvercle est identifiée par la partie linéaire du profil de température, traduisant le phénomène de conduction thermique. Ce régime de couvercle est visible sur les profils de température des cas 3 à 5 (pour des valeurs du paramètre *avis* de 8 et 15, le contraste de viscosité entre la base et la surface est respectivement de  $3.10^3$  et  $3.10^6$ ).

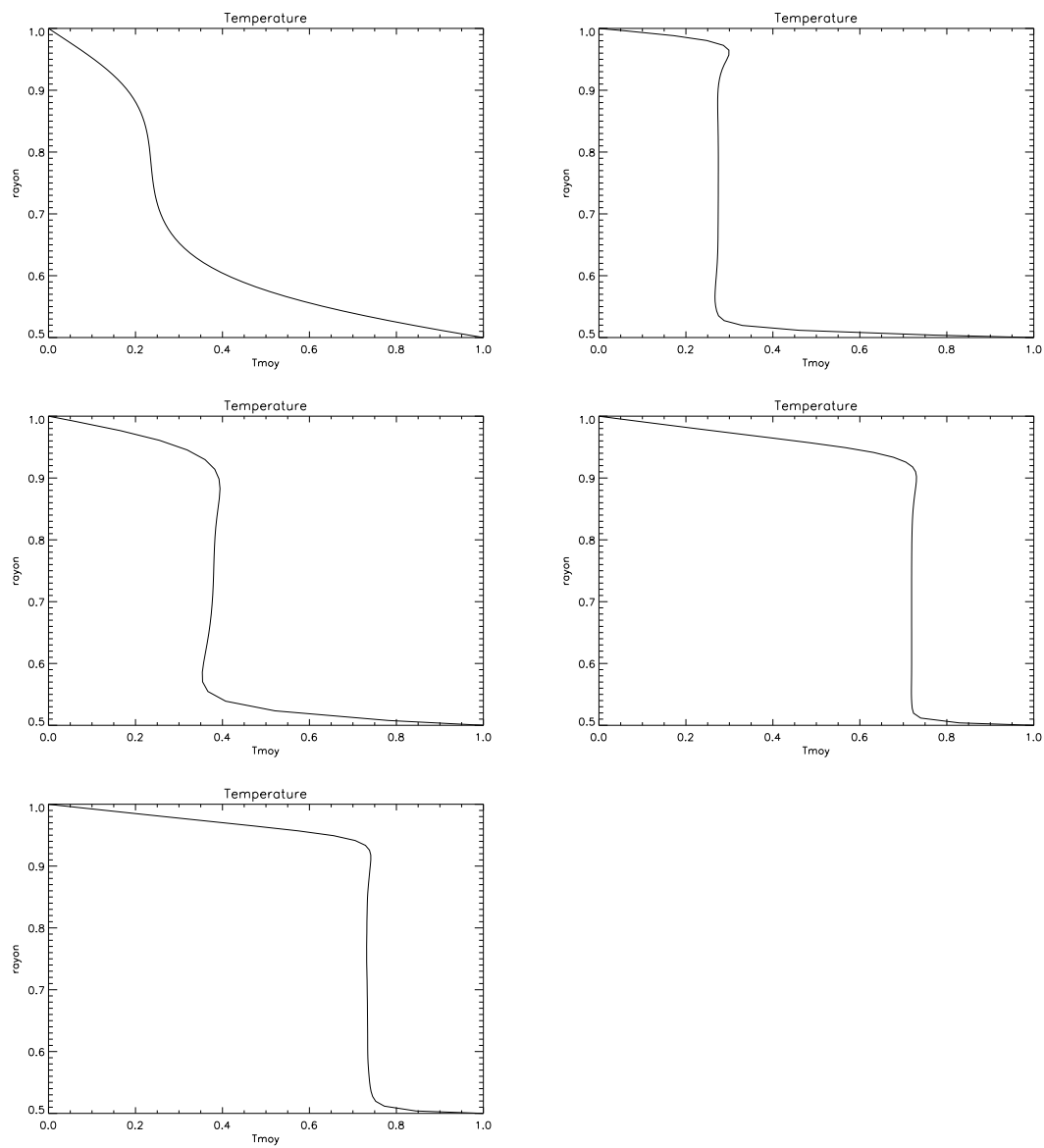
L'impact du chauffage volumétrique sur la température moyenne du milieu va s'exprimer par le décalage du profil vers des températures supérieures (cf. profils de température du cas n° 5 de la figure (4.1)). Ce décalage va être d'autant plus important que le chauffage sera élevé. Cette source de chaleur supplémentaire va entraîner la diminution de la viscosité et favoriser l'apparition de nouveaux panaches.

### 4.2.3 Champs de température

Les champs de température sont représentés sous la forme d'isosurface ; une isosurface 'chaude' représentée en rouge et une isosurface 'froide' représentée en bleu (figure (4.2)). Notons que l'isosurface chaude ou froide ne correspond pas systématiquement à une température identique pour les cas présentés ici.

Le cas n° 1 représente un mode de convection tétraédrique, caractérisé par quatre panaches. Il est à noter que même si la perturbation thermique initiale est cubique, une telle géométrie peut apparaître au cours de la simulation et correspond à un état stationnaire de la convection thermique. Les deux modes de convection cubique et tétraédrique sont des cas classiques de la convection thermique et ont déjà fait l'objet de publications (Busse (1975); Busse et Riahi (1982); Ratcliff *et al.* (1996)).

Dans le cas n° 2, le nombre de Rayleigh est plus élevé ( $1.10^7$ ), ce qui engendre une convection thermique plus turbulente et une géométrie du champ de température plus complexe. Sur l'animation du champ de température, l'évolution de la géométrie de convection est bien visible, avec notamment la coalescence de certains panaches.

FIG. 4.1 – *Profils de température des cas présentés dans le tableau (4.2).*

Le cas n° 3 est caractérisé par un nombre de Rayleigh plus faible mais une viscosité dépendante de la température ( $avis = 8$ , soit un contraste de  $3.10^3$ ). Dans cet exemple les panaches sont distincts et séparés les uns des autres. En comptant les régions polaires non représentées ici, une douzaine de panaches est visible.

Le cas n° 4 présente un nombre de Rayleigh voisin de celui du cas précédent, mais un contraste de viscosité beaucoup plus élevé ( $avis = 15$ , soit un contraste de  $3.10^6$ ). Les panaches sont plus rapprochés les uns des autres et l'on observe la coalescence de certaines structures.

L'ajout du chauffage interne (cas n° 5) a pour effet d'augmenter la température moyenne du milieu et par conséquent de diminuer la viscosité. L'effet principal est une augmentation du nombre de panaches, accompagnée par une diminution de la longueur d'onde de la géométrie de la convection. L'effet est bien visible sur le champ de température du cas n° 5 (figure (4.2)). Dans cet exemple, la valeur adimensionnée du chauffage est de 10 : la géométrie du champ de température est très différente de celle observée pour le cas n° 4. Un grand nombre de structures est visible, mais leur amplitude est beaucoup plus faible que dans le cas précédent.

#### 4.2.4 Topographie dynamique de surface et Géoïde

La topographie dynamique est directement liée à la contrainte radiale de surface, ce qui explique pourquoi la longueur d'onde associée est semblable à celle des champs de température 3D.

Le géoïde, quant à lui, est lié aux contraintes radiales à la CMB et à la surface, mais également à la distribution des anomalies de densité du manteau. La contribution de la CMB, du fait de sa profondeur, joue un rôle sur les grandes longueurs d'ondes, ce qui explique pourquoi la longueur d'onde caractéristique du géoïde est supérieure à celle de la topographie de surface. L'amplitude du géoïde est, de plus, constamment inférieure à celle de la topographie dynamique.

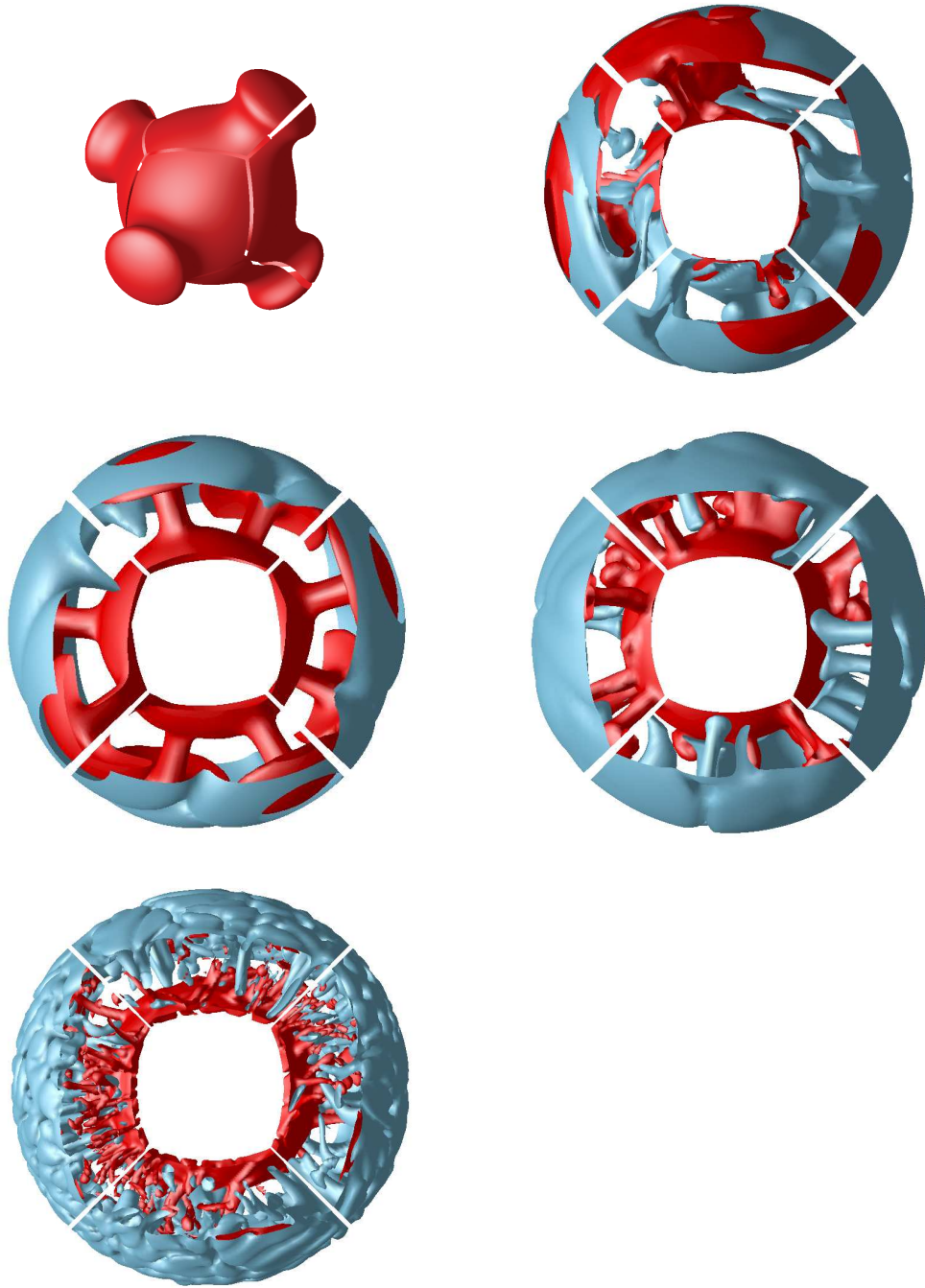


FIG. 4.2 – *Champs de température 3D des cas présentés dans le tableau (4.2).*

Nous retrouvons clairement pour le cas n° 1 l'effet du mode de convection tétraédrique sur la géométrie de la topographie dynamique et du géoïde (figure (4.3)) : les valeurs maximales de la topographie et du géoïde correspondent aux emplacements des panaches convectifs.

Pour le cas n° 2, du fait d'un nombre Rayleigh élevé, la géométrie de la topographie et du géoïde est plus complexe, mais fidèle à la géométrie du champ de température. De plus, la longueur d'onde associée au géoïde est supérieure à celle de la topographie dynamique, ce que l'on confirmera par la suite grâce aux spectres de puissance.

Les résultats des cas 3 et 4 sont également cohérents avec la géométrie du champ de température. La très faible longueur d'onde du champ de température se retrouve dans la forme de la topographie et du géoïde du cas n° 5. Cela est dû au chauffage interne qui entraîne la diminution de la viscosité et favorise l'apparition de nouveaux panaches d'amplitude plus faible.

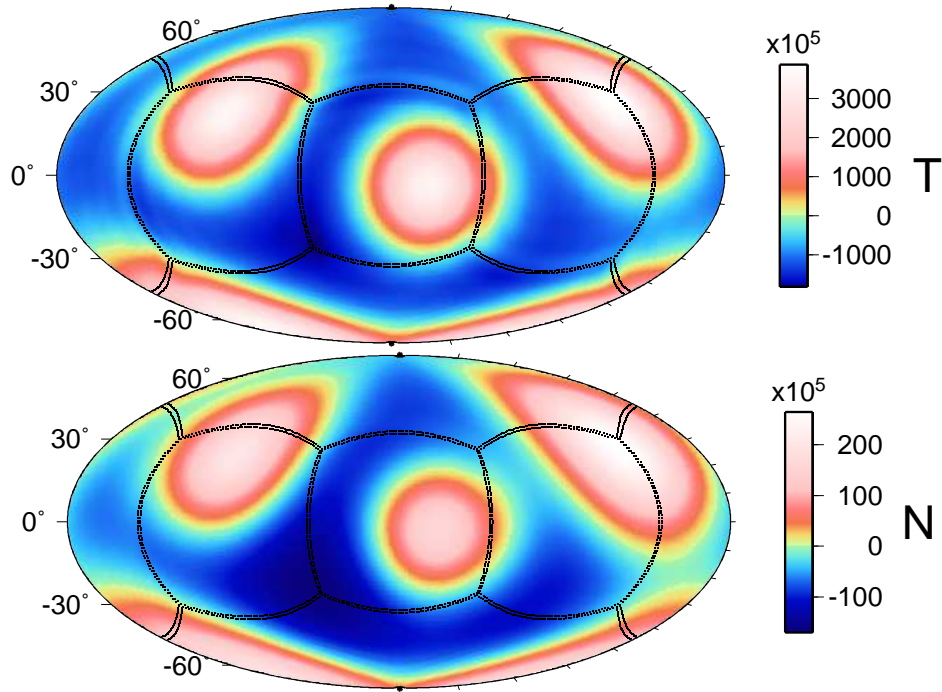


FIG. 4.3 – *Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 1.*

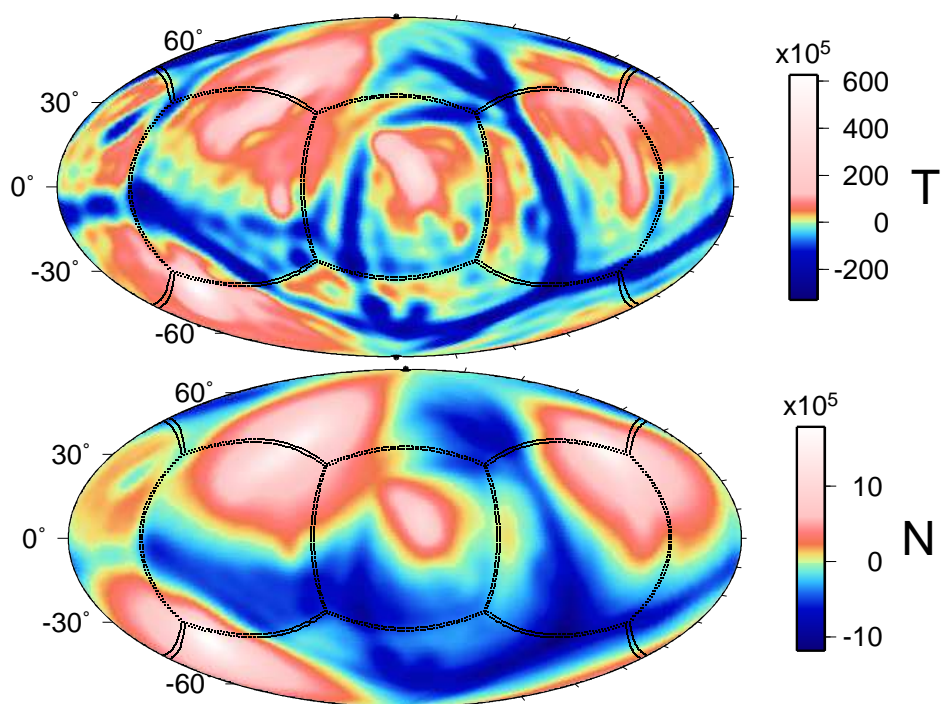


FIG. 4.4 – Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 2.

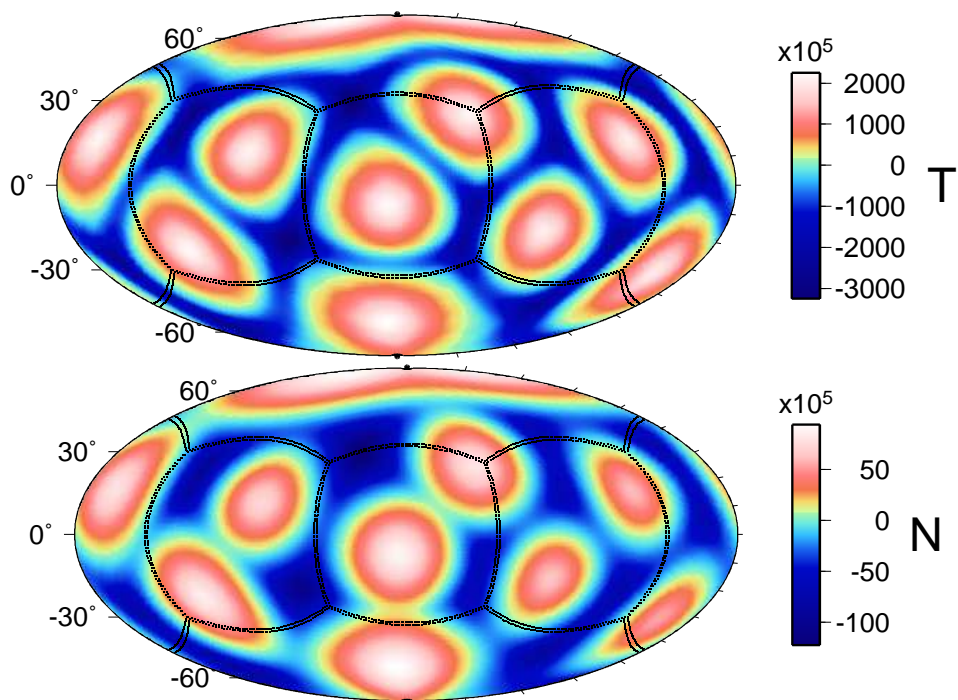


FIG. 4.5 – Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 3.



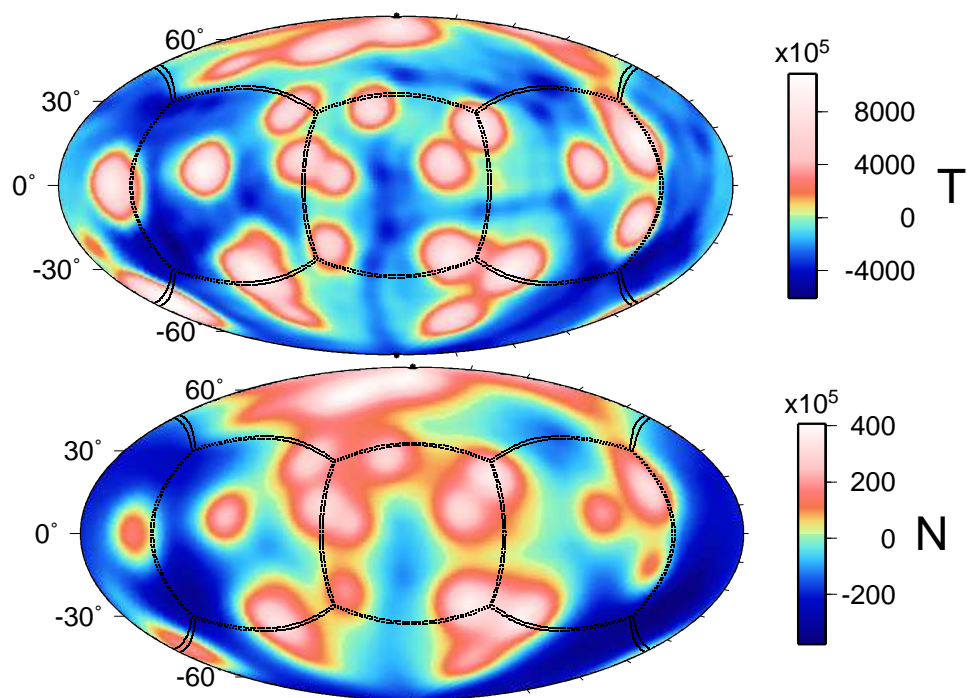


FIG. 4.6 – Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 4.

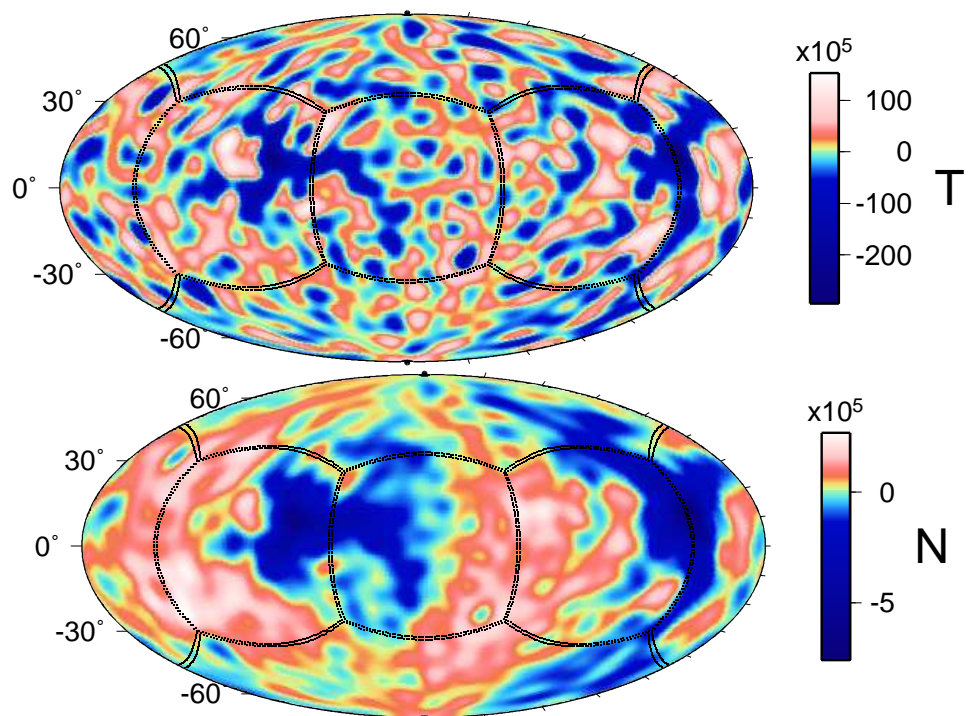


FIG. 4.7 – Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 5.

### 4.2.5 Spectres de puissance

La représentation des spectres de puissance de la topographie dynamique de surface et du géoïde permet d'estimer la contribution de chaque longueur d'onde à la forme globale des fonctions. Il est ainsi possible d'estimer l'effet de paramètres tels que le contraste de viscosité et le chauffage interne sur la géométrie des résultats, en analysant les variations de pente et la forme globale des spectres. Notons toutefois que l'introduction de la viscosité variable et du chauffage interne ne se fait pas à Rayleigh interne constant. Or, c'est la valeur de ce nombre qui va, au premier ordre, contrôler l'amplitude et la forme globale des spectres.

Les spectres de puissance représentés ici sont développés jusqu'au degré 30, ce qui satisfait à la condition énoncée au paragraphe 3.2.2 de la page 98. Cependant, l'étude des fonctions réponses montre que l'erreur associée est supérieure à 1% pour les degrés supérieurs à 15 (Choblet *et al.* (2006), cf. Annexes).

Les spectres de puissance du cas n° 1 présentent des oscillations au delà du degré 10. Il se peut que cela soit lié au mode de convection particulier (tétraédrique) et à la très faible contribution des hauts degrés. Notons que ces résultats ont été obtenus sur une grille grossière de  $6 \times 32^3$ , ce qui pourrait être à l'origine de ces oscillations. Cependant, nous pouvons noter une décroissance de l'amplitude des spectres vers les plus hauts degrés et un pic centré sur le degré 3.

Pour le cas n° 2, les spectres de puissance de la topographie dynamique et du géoïde présentent une forme similaire, avec toutefois une pente plus forte pour le géoïde au delà du degré 8. Cela traduit bien le fait que la longueur d'onde caractéristique du géoïde est supérieure à celle de la topographie dynamique, comme nous l'avons constaté précédemment sur la figure (4.4). Notons également que l'amplitude du géoïde est en moyenne inférieure de deux ordres de grandeur à celle de la topographie et que les spectres présentent une valeur maximale pour le degré 3.

Les spectres de puissance du cas n° 3 présentent également une forme similaire pour les faibles degrés et une pente plus forte au delà du degré 10. Comme pour le



cas précédent, cela traduit une longueur d'onde du géoïde supérieure à celle de la topographie. Notons également que le maximum du spectre est associé cette fois-ci au degré 5 et que l'amplitude du géoïde est, en moyenne, inférieure de 3 ordres de grandeur à celle de la topographie. Il semble donc que l'introduction d'une viscosité variable modifie la géométrie du problème, avec notamment une longueur d'onde associée plus faible (migration du pic des spectres de puissance vers les plus hauts degrés).

Les spectres de puissance de la topographie et du géoïde pour le cas n° 4 présentent des variations plus faibles que pour le cas n° 3, mais une décroissance notable à partir du degré 9. Le maximum est ici aussi associé au degré 5, mais l'écart avec les valeurs des degrés voisins est plus faible que pour le cas n° 3.

L'ajout du chauffage interne modifie notablement l'allure des spectres de puissance, comme nous avons pu le constater également sur les champs de température représentés sur la figure (4.2). Si l'on compare les résultats des cas 4 et 5, c'est à dire avant et après l'introduction du chauffage, la variation d'amplitude du spectre d'un degré à l'autre est nettement estompée et la forme globale du spectre est lissée. Le chauffage volumétrique participe à l'augmentation de la température et par conséquent entraîne la diminution de la viscosité ; ceci engendre une augmentation notable du nombre total de panaches tout en réduisant la longueur d'onde de la géométrie de la convection. Cela se traduit par une contribution plus forte des hauts degrés, qui se retrouve dans la forme globale des spectres de puissance et s'exprime par une pente quasi nulle voir positive pour les degrés supérieurs à 8 ; l'amplitude des spectres est également fortement diminuée.

### 4.3 Influence de la viscosité variable

Comparons les résultats obtenus pour les cas 2 et 3 : comme dans le cas isovisqueux, les longueurs d'ondes observées pour la topographie dynamique et le géoïde correspondent aux longueurs d'ondes du champ de température.

Le cas n° 3 correspond au mode de convection dit du couvercle stagnant, zone caractérisée par un profil de température conductif (figure 4.1 page 110). L'effet du

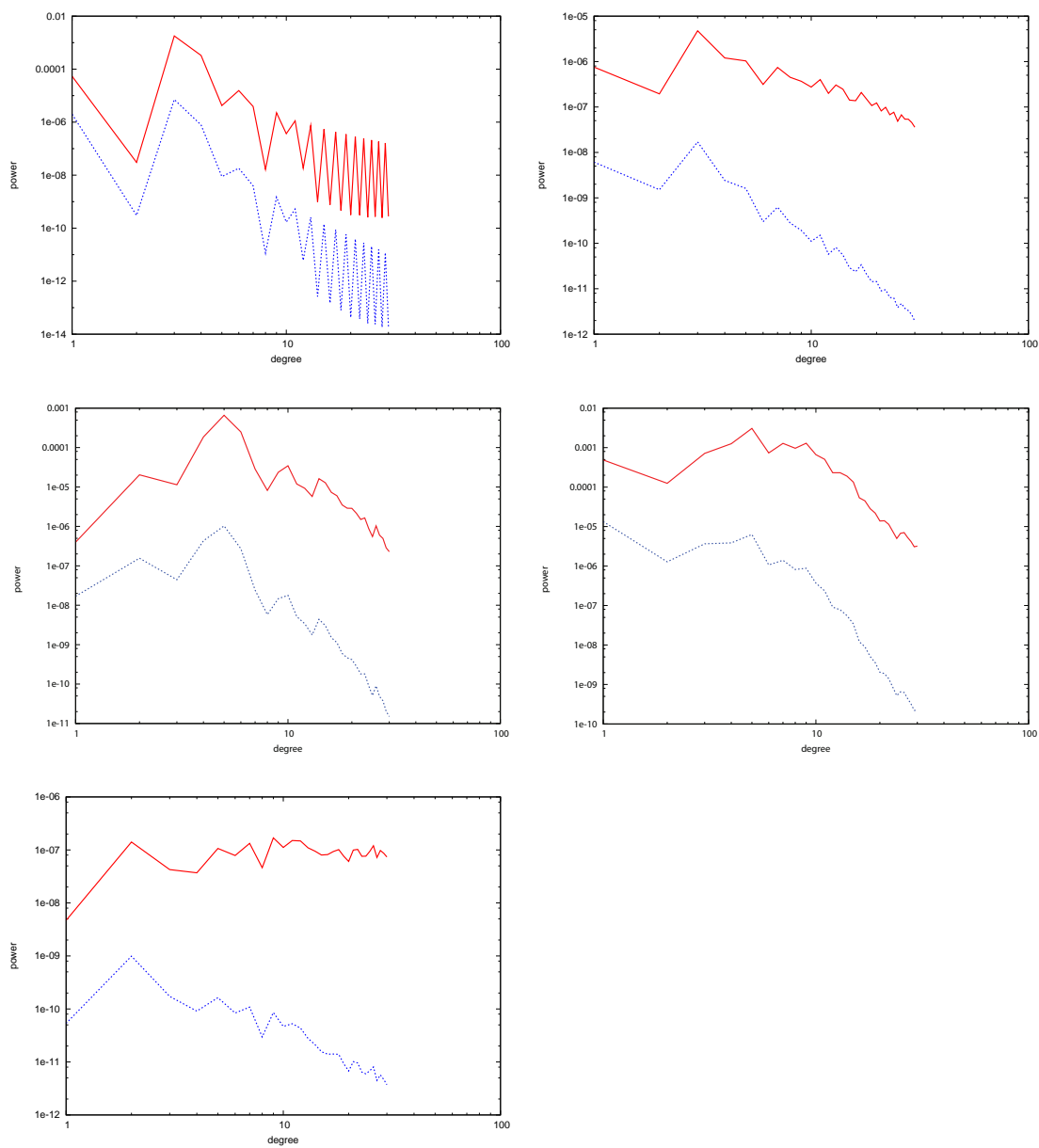


FIG. 4.8 – Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface (trait plein) et du géoïde (pointillés) obtenus pour les cas présentés dans le tableau (4.2).

régime de couvercle conductif semble être identique sur l'amplitude de la topographie et le géoïde, avec une multiplication de l'ordre de 10 à 20.

L'augmentation de l'amplitude de la topographie de surface et du géoïde se retrouve également dans les spectres de puissance. La seconde information délivrée par l'analyse des spectres de puissance concerne la diminution de la longueur d'onde caractéristique de la topographie et du géoïde. En effet, le pic migre vers les plus haut degrés (du degré 3 au degré 5 entre les cas 2 et 3), mais la forme générale des spectres reste similaire. Cela est principalement dû à la valeur du nombre de Rayleigh interne  $Ra_i$ . Pour les cas isovisqueux, le Rayleigh de surface est égal au Rayleigh interne, alors que pour les cas à viscosité variable, le nombre de Rayleigh interne dépend du contraste de viscosité (tableau (4.2) page 107).

## 4.4 Influence du chauffage interne

Lorsque le chauffage est introduit, la topographie et le géoïde diminuent fortement, ce qui est bien visible sur les figures (4.6), (4.7) et (4.8) pour les cas 4 et 5. Comme dans le cas de la viscosité variable, la longueur d'onde caractéristique de la convection diminue lorsque le chauffage volumétrique est présent et les valeurs des termes de haut degré deviennent supérieures à celles des termes de plus grande longueur d'onde. Ainsi, pour le cas n° 5, la pente du spectre de puissance du géoïde diminue fortement pour les degrés supérieurs à 8 et celle de la topographie dynamique devient même nulle ; les spectres présentent alors une forme lissée quasi-horizontale : la contribution des grandes longueurs d'onde diminue et tous les degrés contribuent pour la même part au signal global.

## 4.5 Similarités avec Vénus

À nouveau, nous insistons sur le fait que la comparaison des résultats reste délicate, du fait de la nature différente des runs. En effet, la géométrie de la topographie et du géoïde, la forme et l'amplitude des spectres de puissance sont, au premier ordre, contrôlés par la valeur du nombre de Rayleigh interne, qui lui-même dépend du contraste de viscosité et du nombre de Rayleigh de surface. Pour réaliser une étude rigoureuse de l'impact du contraste de viscosité et du chauffage interne sur la géométrie des résultats, il sera nécessaire de déterminer précisément les valeurs de ces différents paramètres pour que chaque run présente un nombre de Rayleigh interne semblable. Malgré cela, nous pouvons comparer nos premiers résultats aux caractéristiques des planètes telluriques, notamment celles de Vénus.

La figure (4.9) représente la topographie et le géoïde de Vénus développés au degré 30, afin de comparer ces caractéristiques aux résultats des figures (4.3) à (4.7). La géométrie du géoïde rappelle celle obtenue pour le cas n°5, mais celle de la topographie ne se retrouve pas dans nos résultats. Notons que la topographie représentée sur les figures (4.3) à (4.7) correspond à une topographie dynamique qui, par conséquent, est loin de représenter la topographie observée à la surface d'une planète.

La figure (4.10) permet de comparer les spectres de puissance de la topographie et du géoïde de Vénus aux résultats obtenus pour le cas isovisqueux (cas n°1) et le cas du couvercle conducteur (cas n°5). Pour ces deux derniers cas, le spectre de puissance de la topographie est toujours supérieur à celui du géoïde, comme cela est le cas pour Vénus, mais également pour les autres planètes telluriques (cf. chapitre 1). L'amplitude des spectres de la topographie et du géoïde pour le cas isovisqueux et celui du couvercle conducteur est cependant supérieure à celle des spectres de Vénus. Mais nous pouvons noter que les spectres les plus similaires à ceux de Vénus sont ceux du cas du couvercle conducteur, même si la forme du spectre de topographie s'éloigne de celle de Vénus. Malgré les similarités identifiés dans les spectres de puissance et la géométrie de la topographie et du géoïde, nous devons rester prudents quant à l'interprétation

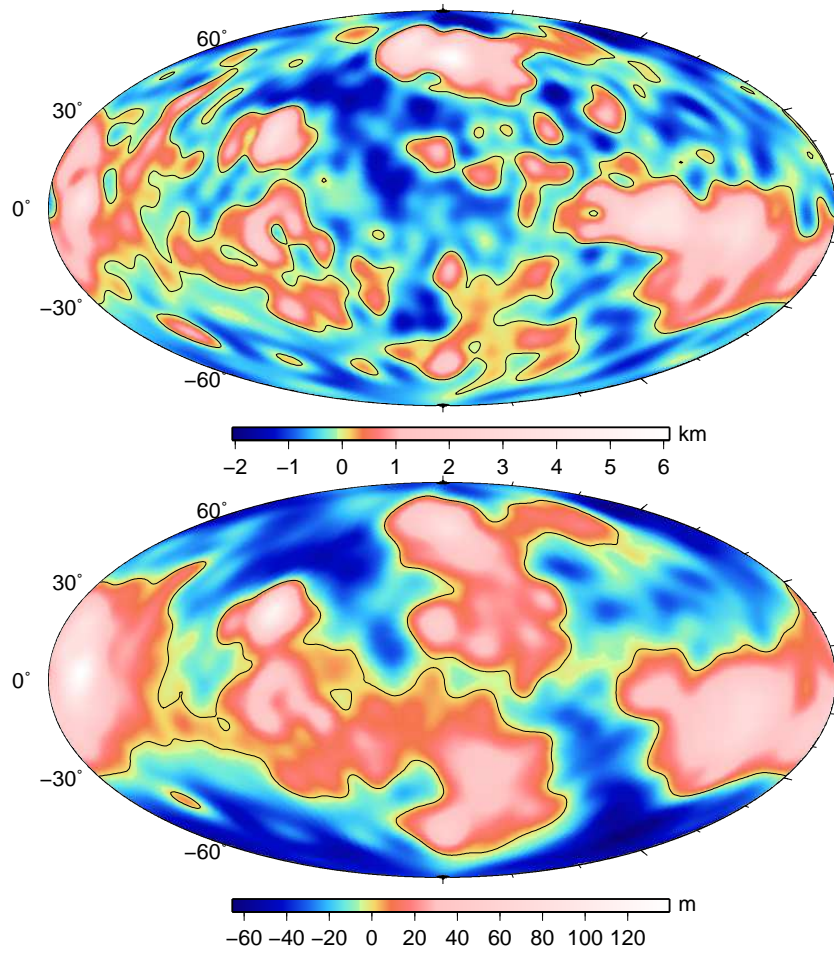


FIG. 4.9 – *Topographie (haut) et géoïde (bas) de Vénus développés au degré 30.*

des résultats. Il ne faut pas oublier que ces simulations sont encore récentes et que de nombreuses améliorations peuvent encore être apportées à notre modèle. Cependant, Vénus est peut être la planète la plus 'simple' à étudier, en comparaison avec la Terre et Mars. Ne présentant aucun signe de tectonique des plaques mais une forte corrélation entre la topographie et le géoïde, cette planète semble être l'expression parfaite des phénomènes d'origine interne à la surface (support dynamique des volcans, amincissement de la lithosphère...).

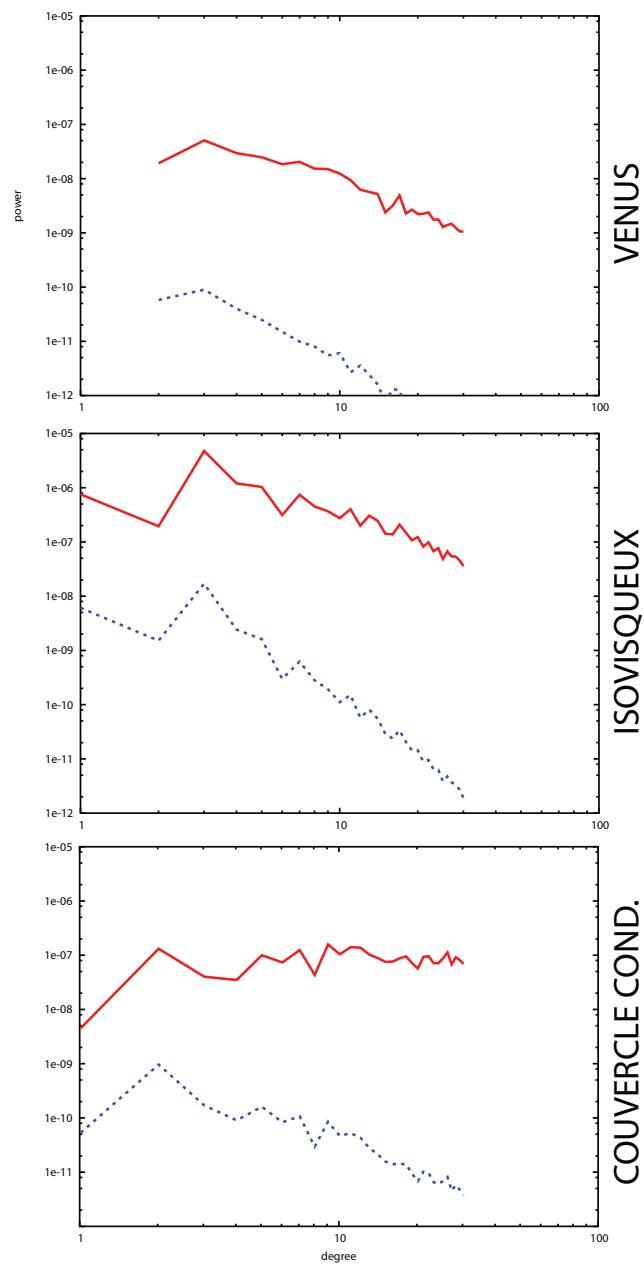


FIG. 4.10 – Spectres de puissance adimensionnés de la topographie (trait plein) et du géoïde (pointillés) de Vénus, du cas isovisqueux (cas n°1) et du cas du couvercle conducteur (cas n°5).

## 4.6 Conclusions

Les amplitudes et les longueurs d'ondes associées de la topographie dynamique et du géoïde sont cohérentes et leurs signatures sont directement liées aux processus de dynamique interne (flux mantellique et distributions de densité). L'effet des instabilités thermiques est clairement visible dans les différentes figures, quels que soient les paramètres de convection (nombre de Rayleigh, contraste de viscosité, chauffage interne). Même si notre approche est encore grossière, elle a sa place parmi les autres méthodes géophysiques modélisant la structure et la dynamique interne des planètes telluriques comme les relations topographie/gravité (GTR), la modélisation de l'épaisseur crustale ou de l'admittance (Wieczorek (2007)).

Mais à ce stade de notre étude, il est encore trop tôt pour comparer nos résultats aux caractéristiques géophysiques des planètes telles que Vénus ou Mars. Même si nous avons remarqué que l'amplitude du géoïde est constamment inférieure à celle de la topographie, comme cela est le cas pour ces planètes, notre modèle est encore trop réducteur et de nombreuses améliorations peuvent encore lui être apportées : le modèle rhéologique est relativement simple et ne tient pas compte de la dépendance en pression de la viscosité, de l'élasticité de la lithosphère ou du transport d'éléments chimiques. Une loi de viscosité type Arrhénius engendre un champ de contrainte plus important près de la surface dans le cas du couvercle stagnant (Solomatov (2004)). La principale conséquence est une topographie de surface surestimée (et de la même manière, une influence plus grande de la topographie sur le géoïde). Yoshida et Kageyama (2006) ont également montré que la dépendance en pression de la viscosité diminue fortement le degré caractéristique de la convection ( $l=1-4$ ).

La nature élastique de la lithosphère influe également sur le signal de surface et agit comme une filtre. Roberts et Zhong (2004) ont montré qu'une telle lithosphère peut diminuer d'un facteur trois le signal gravimétrique d'un plume. De plus, une quantité non négligeable de la charge associée à la topographie peut être supportée par des processus tels que l'isostasie ou la flexure de la lithosphère (Turcotte *et al.* (1981)).

Enfin, les gradients de densité et de viscosité d'origine compositionnelle jouent un rôle important dans la dynamique du manteau, notamment au niveau de la lithosphère continentale (van Gerven *et al.* (2004)) et océanique (Choblet et Parmentier (2001)) ainsi qu'à la base du manteau inférieur (Deschamps et Sotin (2001)).



# Chapitre 5

## Conclusions et Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse se sont divisés en deux parties principales. Dans la première partie, notre étude s'est portée sur les données gravimétriques martiennes. Grâce aux précédentes études géomorphologiques menées à la surface de la planète et à l'identification de plusieurs lignes de rivage fossiles dans l'hémisphère nord de Mars, nous nous sommes intéressés à Deuteronilus. Nous avons, dans un premier temps, confirmé la nature de ce contact. Par la suite, en calculant les variations du potentiel de pesanteur en fonction de la longitude le long de ce contact, nous avons démontré que Deuteronilus a enregistré la variation de la forme globale de la planète. Les études spectrométriques issues des données de *Mars Express* et des rovers *Spirit* et *Opportunity* sont venues étayer nos hypothèses en confirmant la chronologie des étapes géologiques majeures du Noachien et de l'Hespérien, notamment la déformation de Mars au Noachien supérieur, période correspondant à la phase de volcanisme intense qui a donné naissance au dôme de Tharsis. Ce complexe volcanique est d'ailleurs la clé de la compréhension de la formation et de l'évolution de Mars et aujourd'hui encore, de nombreuses questions, comme le support dynamique d'origine interne de l'édifice, restent posées.

En délimitant les frontières géographiques de la ligne de rivage Deuteronilus, nous avons déterminé les caractéristiques de l'océan martien. D'une profondeur moyenne de 500 mètres et d'un volume correspondant au 3/4 du volume de l'océan arctique

terrestre, cet océan aujourd’hui disparu est la preuve que Mars n’a pas toujours présenté le visage qu’elle affiche aujourd’hui. Toutefois, la quantité d’eau recueillie par cet océan est très limitée comparée au réservoir mantellaire estimé à partir des études menées sur l’hydratation des météorites martiennes, ce qui soulève des questions quant au devenir de l’eau originelle.

L’étude de l’hypsométrie martienne nous a permis de démontrer que les segments linéaires de la courbe d’hypsométrie cumulée de la topographie martienne correspondent à des régions qui ont accueilli l’océan martien. Sur Terre, les segments linéaires de la courbe d’hypsométrie cumulée traduisent des processus de subsidence thermique de la lithosphère océanique. Cette constatation est frappante et soulève des interrogations qui nécessitent des investigations supplémentaires.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la dynamique interne des planètes telluriques. Dans le but de mieux comprendre les effets de la convection thermique sur les observables de surface (topographie dynamique et géoïde), nous avons développé un nouvel outil alliant modélisation de la convection thermique en domaine sphérique tri-dimensionnel et méthode spectrale basée sur le développement en harmoniques sphériques (Choblet *et al.* (2006), cf. Annexes).

L’adimensionnement des équations caractéristiques du couplage entre convection thermique et observables de surface a permis d’ajouter deux nouveaux paramètres  $S$  et  $G_r$  à la liste des nombres sans dimension de la convection thermique à nombre de Prandtl infini en domaine sphérique 3D ( $Ra$ ,  $f$ ,  $\gamma$  et  $h$ ). Malgré une interprétation délicate de la signification physique de ces paramètres, l’estimation de leurs valeurs a permis de classer les différents objets du système solaire. Ainsi, les valeurs minimales de  $S$  et  $G_r$  correspondent respectivement aux corps caractérisés par un manteau silicaté ou une croûte glacée très fins (Mercure et Europe). En revanche, les valeurs maximales sont associées respectivement aux corps dont le manteau ou la croûte glacée sont très épais (Vénus et Ganymède).

Nous avons ensuite montré que les effets du flux mantellique et des hétérogénéités de densité sur la topographie dynamique et le géoïde sont clairement identifiables et non négligeables. L'analyse de la géométrie de la topographie dynamique de surface et du géoïde ainsi que l'étude de l'amplitude et de la forme des spectres de puissance nous ont permis de déterminer l'impact de la viscosité variable et du chauffage interne. Nous avons ensuite comparé nos résultats aux caractéristiques des planètes telluriques (principalement Vénus), tout en soulignant la prudence avec laquelle cette analyse doit être menée.

En effet, de nombreuses améliorations peuvent encore être apportées à cet outil : le modèle rhéologique est basé sur une simple loi de viscosité type Arrhenius (dépendance en température), ce qui, dans le cas du couvercle stagnant, engendre un champ de contrainte plus important près de la surface ; cela entraîne une surestimation de la topographie de surface et par conséquent une influence plus importante sur le géoïde. La dépendance en pression de la viscosité joue également un rôle important, dont le premier effet est la diminution du degré caractéristique de la convection.

D'autres aspects, comme la nature élastique de la lithosphère, doivent être pris en compte : l'élasticité de la lithosphère agit comme un filtre, en atténuant notablement le signal gravimétrique et affectant également la longueur d'onde associée des panaches mantelliques. De plus, une quantité non négligeable de la charge associée à la topographie peut être supportée par des processus tels que l'isostasie ou la flexure de la lithosphère. Enfin, le phénomène d'isostasie thermique doit être modélisé afin de prendre en compte la composante 'thermique' de la topographie dans le signal global.

Il est évident qu'une connaissance précise de la structure interne d'une planète ou d'un satellite nécessite des mesures in-situ. Cependant, de telles mesures demandent la mise en place de réseaux instrumentaux ce qui, à l'échelle d'une planète, représente un investissement financier considérable et une prouesse technologique sans précédent. En attendant de telles mesures grâce aux futures missions au sol vers Mars ou Europe, des données telles que le géoïde et la topographie restent indispensables car elles constituent

les seuls paramètres disponibles susceptibles de fournir des informations quant à la structure et la dynamique interne de ces corps. Ainsi, l'outil que nous avons développé au cours de cette thèse est parfaitement adapté et relativement polyvalent, car il est tout aussi bien applicable au cas des planètes telluriques qu'à celui des satellites de glace et les données des futures missions spatiales permettront à la fois de le tester et de l'améliorer.





# Bibliographie

- O. Aharonson, M. T. Zuber et D. H. Rothman — Statistics of Mars' topography from the Mars Orbiter Laser Altimeter : Slopes, correlations, and physical models. *J. Geophys. Res.*, 106:23723–23736, 2001.
- J. Arkani-Hamed — The lunar mascons revisited. *J. Geophys. Res.*, 103(12):3709–+, 1998.
- J. Arkani-Hamed — Timing of the Martian core dynamo. *J. Geophys. Res.*, 109:3006–+, mars 2004.
- R. E. Arvidson, V. R. Baker, C. Elachi, R. S. Saunders et J. A. Wood — Magellan - Initial analysis of Venus surface modification. *Science*, 252:270–275, 1991.
- M. Balme, N. Mangold, D. Baratoux, F. Costard, M. Gosselin, P. Masson, P. Pinet et G. Neukum — Orientation and distribution of recent gullies in the southern hemisphere of Mars : Observations from High Resolution Stereo Camera/Mars Express (HRSC/MEX) and Mars Orbiter Camera/Mars Global Surveyor (MOC/MGS) data. *J. Geophys. Res.*, 111:5001–+, mai 2006.
- J. R. Baumgardner — Three dimensional treatment of convective flow in the Earth's mantle. *J. Stat. Phys.*, 39:501–511, 1985.
- J.-P. Bibring, Y. Langevin, J. F. Mustard, F. Poulet, R. Arvidson, A. Gendrin, B. Gondet, N. Mangold, P. Pinet et F. Forget — Global Mineralogical and Aqueous Mars History Derived from OMEGA/Mars Express Data. *Science*, 312:400–404, avril 2006.

- B. G. Bills et M. Kibrick — Venus topography - A harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, 90:827–836, 1985.
- D. L. Bindshadler, A. Decharon, K. K. Beratan, S. E. Smrekear et J. W. Head — Magellan observations of Alpha Regio - Implications for formation of complex ridged terrains on Venus. *J. Geophys. Res.*, 97:13563–+, 1992.
- D. Boutin et J. Arkani-Hamed — Pole wandering of Mars : Evidence from paleomagnetic poles. *Icarus*, 181:13–25, mars 2006.
- M. Burša et K. Pěč — *Gravity field and dynamics of the earth*. Berlin, New York : Springer, ©, 1993.
- F.H. Busse — Patterns of convection in spherical shells. *J. Fluid. Mech.*, 72:67–87, 1975.
- F.H. Busse et N. Riahi — Patterns of convection in spherical shells, II. *J. Fluid. Mech.*, 123:283–302, 1982.
- D. B. Campbell, N. J. S. Stacy, W. I. Newman, R. E. Arvidson, E. M. Jones, G. S. Musser, A. Y. Roper et C. Schaller — Magellan observations of extended impact crater related features on the surface of Venus. *J. Geophys. Res.*, 97:16249–+, octobre 1992.
- M. H. Carr et J. W. Head — Oceans on Mars : An assessment of the observational evidence and possible fate. *J. Geophys. Res.*, pages 8–1, mai 2003.
- G. Choblet — Modelling thermal convection with large viscosity gradients in one block of the 'cubed sphere'. *J. Comput. Phys.*, 205:269–291, mai 2005.
- G. Choblet et E. M. Parmentier — Mantle upwelling and melting beneath slow spreading centers : effects of variable rheology and melt productivity. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 184:589–604, janvier 2001.



- G. Choblet, O. Čadek, F. Couturier et C. Dumoulin — OEDIPUS : a new tool to study the dynamics of planetary interiors. *Geophys. J. Int.*, 2006.
- S. M. Clifford et T. J. Parker — The Evolution of the Martian Hydrosphere : Implications for the Fate of a Primordial Ocean and the Current State of the Northern Plains. *Icarus*, 154:40–79, novembre 2001.
- J. G. Cogley — *Hypsometry of the continents*. Annals of Geomorphology, 1985.
- P. Colin et L. Fleitout — Topography of the ocean floor : Thermal evolution of the lithosphere and interaction of deep mantle heterogeneities with the lithosphere. *Geophys. Res. Lett.*, 17:1961–1964, octobre 1990.
- D. R. Currey — *Coastal geomorphology of Great Salt Lake and vicinity*. Graet Salt Lake : A Scientific, Historical, and Economic Overview, 1980.
- F. Deschamps et C. Sotin — Thermal convection in the outer shell of large icy satellites. *J. Geophys. Res.*, 106:5107–5122, mars 2001.
- P. B. Esposito, W. L. Sjogren, N. A. Mottinger, B. G. Bills et E. Abbott — Venus gravity - Analysis of Beta Regio. *Icarus*, 51:448–459, août 1982.
- A. G. Fairén, J. M. Dohm, V. R. Baker, M. A. de Pablo, J. Ruiz, J. C. Ferris et R. C. Anderson — Episodic flood inundations of the northern plains of Mars. *Icarus*, 165:53–67, septembre 2003a.
- A. G. Fairén, J. M. Dohm, V. R. Baker, M. A. de Pablo, J. Ruiz, J. C. Ferris et R. C. Anderson — Tharsis-triggered Flood Inundations of the Lowlands of Mars. In S. Mackwell et E. Stansbery, éditeurs — *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pages 1093–+, mars 2003b.
- W. C. Feldman, T. H. Prettyman, S. Maurice, J. J. Plaut, D. L. Bish, D. T. Vaniman, M. T. Mellon, A. E. Metzger, S. W. Squyres, S. Karunatillake, W. V. Boynton,

- R. C. Elphic, H. O. Funsten, D. J. Lawrence et R. L. Tokar — Global distribution of near-surface hydrogen on Mars. *J. Geophys. Res.*, 109:9006–+, septembre 2004.
- P. G. Ford et G. H. Pettengill — Venus topography and kilometer-scale slopes. *J. Geophys. Res.*, 97:13103–+, août 1992.
- A. Gendrin, N. Mangold, J.-P. Bibring, Y. Langevin, B. Gondet, F. Poulet, G. Bonello, C. Quantin, J. Mustard, R. Arvidson et S. LeMouélic — Sulfates in Martian Layered Terrains : The OMEGA/Mars Express View. *Science*, 307:1587–1591, mars 2005.
- S. Godunov — A finite difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics. *Mat. Sb.*, pages 47–271, 1959.
- R. E. Grimm et S. C. Solomon — Viscous relaxation of impact crater relief on Venus - Constraints on crustal thickness and thermal gradient. *J. Geophys. Res.*, 93:11911–11929, octobre 1988.
- B. H. Hager et R. W. Clayton — *Constraints on the structure of mantle convection using seismic observations, flow models, and the geoid*. Mantle Convection : Plate Tectonics and Global Dynamics, W.R. Peltier, vol. 78, pp. 675-763, Gordon and Breach, New York., 1989.
- H. Harder — Mantle convection and the dynamic geoid of Mars. *Geophys. Res. Lett.*, 27:301–+, 2000.
- H. Harder et U. R. Christensen — A one-plume model of martian mantle convection. *nat*, 380:507–509, 1996.
- W. K. Hartmann — Martian cratering 8 : Isochron refinement and the chronology of Mars. *Icarus*, 174:294–320, avril 2005.
- J. W. Head — Processes of crustal formation and evolution on Venus - an analysis of topography, hypsometry, and crustal thickness variations. *Earth Moon and Planets*, 50:25–55, décembre 1990.

- J. W. Head, M. Kreslavsky, H. Hiesinger, M. Ivanov, S. Pratt, N. Seibert, D. E. Smith et M. T. Zuber — Oceans in the past history of Mars : Tests for their presence using Mars Orbiter Laser Altimeter (MOLA) data. *Geophys. Res. Lett.*, 25:4401–+, décembre 1998.
- J. W. Head, M. Kreslavsky, H. Hiesinger, M. Ivanov, S. Pratt, N. Seibert, D. E. Smith et M. T. Zuber — Possible ancient oceans on Mars :Evidence from Mars Orbiter Laser Altimeter data. *Science*, 286:2134–2137, 1999.
- J. W. Hernlund et P. J. Tackley — Three-dimensional spherical shell convection at infinite prandtl number using the 'cubed sphere' method. *Computational Fluid and Solid Mechanics*, page 931, 2003.
- R. R. Herrick, B. G. Bills et S. A. Hall — Variations in effective compensation depth across Aphrodite Terra, Venus. *Geophys. Res. Lett.*, 16:543–546, juin 1989.
- R. R. Herrick et R. J. Phillips — Blob tectonics - A prediction for Western Aphrodite Terra, Venus. *Geophys. Res. Lett.*, 17:2129–2132, novembre 1990.
- L. L. Hood, C. N. Young, N. C. Richmond et K. P. Harrison — Modeling of major martian magnetic anomalies : Further evidence for polar reorientations during the Noachian. *Icarus*, 177:144–173, septembre 2005.
- A. T. Hsui, W. S. Yang et J. R. Baumgardner — A preliminary study of the effects of some flow parameters in the generation of poloidal and toroidal energies within a 3-D spherical thermal-convective system with variable viscosity. *Pure and Appl. Geophys.*, 145:487–503, 1995.
- G. T. Jarvis — Curvature, heat flow and normal stresses in two-dimensional models of mantle convection. *Phys. Earth Plan. Int.*, 88:17–29, 1995.
- R. Jeanloz et S. Morris — Temperature distribution in the crust and mantle. *Science*, 14:377–415, 1986.

- N. Jones — *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*. Research Studies Press Ltd, England, 1985.
- A. Kageyama et T. Sato — “Yin-Yang grid” : An overset grid in spherical geometry. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 5:9005–+, septembre 2004.
- S.-I. Karato et P. Wu — Rheology of the upper mantle : A synthesis. *Science*, 260:771–778, mai 1993.
- H. R. Karlsson, R. N. Clayton, E. K. Gibson, Jr. et T. K. Mayeda — Water in SNC meteorites - Evidence for a Martian hydrosphere. *Science*, 255:1409–1411, mars 1992.
- S. King — *Models of mantle viscosity*. Mineral physics and crystallography, a handbook of physical constants, edited by T. Ahrens, pp. 227-236, AGU, Washington, D.C., 1995.
- S. D. King — Geoid and topographic swells over temperature-dependent thermal plumes in spherical-axisymmetric geometry. *Geophys. Res. Lett.*, 24:3093–3096, 1997.
- A. S. Konopliv, W. B. Banerdt et W. L. Sjogren — Venus Gravity : 180th Degree and Order Model. *Icarus*, 139:3–18, mai 1999.
- A. S. Konopliv et W. L. Sjogren — Venus spherical harmonic gravity model to degree and order 60. *Icarus*, 112:42–54, novembre 1994.
- A. S. Konopliv, C. F. Yoder, E. M. Standish, D.-N. Yuan et W. L. Sjogren — A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris. *Icarus*, 182:23–50, mai 2006.
- Y. Le Stunff et Y. Ricard — Topography and geoid due to lithospheric mass anomalies. *Geophys. J. Int.*, 122:982–990, mars 1995.
- Y. Le Stunff et Y. Ricard — Partial advection of equidensity surfaces : A solution for the dynamic topography problem ? *J. Geophys. Res.*, 102:24655–67, novembre 1997.

- F. G. Lemoine, D. E. Smith, D. D. Rowlands, M. T. Zuber, G. A. Neumann, D. S. Chinn et D. E. Pavlis — An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor. *J. Geophys. Res.*, 106:23359–23376, octobre 2001.
- D. W. Leverington, R. R. Ghent, R. P. Irwin, R. A. Craddock et T. A. Maxwell — Possible Hydroisostatic Influences on the Collective Geometry of Strandline Features Formed in Association with Ancient Martian Oceans. In S. Mackwell et E. Stansbery, éditeurs — *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pages 1282–+, mars 2003.
- C. Lithgow-Bertelloni et P. G. Silver — Dynamic topography, plate driving forces and the African superswell. *Nature*, 395:269–72, 1998.
- H. Masursky, E. Eliason, P. G. Ford, G. E. McGill, G. H. Pettengill, G. G. Schaber et G. Schubert — Pioneer Venus radar results - Geology from images and altimetry. *J. Geophys. Res.*, 85:8232–8260, décembre 1980.
- G. E. McGill — The Utopia Basin revisited : Regional slope and shorelines from MOLA profiles. *Geophys. Res. Lett.*, 28:411–414, février 2001.
- P. J. McGovern, S. C. Solomon, D. E. Smith, M. T. Zuber, M. Simons, M. A. Wieczorek, R. J. Phillips, G. A. Neumann, O. Aharonson et J. W. Head — Localized gravity/topography admittance and correlation spectra on Mars : Implications for regional and global evolution. *J. Geophys. Res.*, 107(E12):19–1, décembre 2002.
- M. K. McNutt — Superswells. *Reviews of Geophysics*, 36:211–244, 1998.
- H. Y. McSween, T. L. Grove, R. C. F. Lentz, J. C. Dann, A. H. Holzheid, L. R. Riciputi et J. G. Ryan — Geochemical evidence for magmatic water within Mars from pyroxenes in the Shergotty meteorite. *Nature*, 409:487–490, janvier 2001.
- D. Mège et P. Masson — A plume tectonics model for the Tharsis province, Mars. *Plan. Space Sci.*, 44:1499–1546, décembre 1996.

- L. Moresi et M. Gurnis — Constraints on the lateral strength of slabs from three-dimensional dynamic flow models. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 138:15–28, février 1996.
- P. Morgan et R. J. Phillips — Hot SPOT heat transfer - Its application to Venus and implications to Venus and earth. *J. Geophys. Res.*, 88:8305–8317, octobre 1983.
- P. M. Muller et W. L. Sjogren — Mascons : Lunar Mass Concentrations. *Science*, 161:680–684, août 1968.
- J. P. Murphy et J. W. Siry — Lunar mascon evidence from Apollo orbits. *Plan. Space Sci.*, 18:1137–+, août 1970.
- G. Neukum, R. Jaumann, H. Hoffmann, E. Hauber, J. W. Head, A. T. Basilevsky, B. A. Ivanov, S. C. Werner, S. van Gasselt, J. B. Murray, T. McCord et T. HRSC Co-Investigator Team — Recent and episodic volcanic and glacial activity on Mars revealed by the High Resolution Stereo Camera. *Nature*, 432:971–979, décembre 2004.
- G. A. Neumann, M. T. Zuber, M. A. Wieczorek, P. J. McGovern, F. G. Lemoine et D. E. Smith — Crustal structure of Mars from gravity and topography. *J. Geophys. Res.*, 109(18):8002–+, août 2004.
- F. Nimmo et D. McKenzie — Volcanism and Tectonics on Venus. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 26:23–53, 1998.
- D. W. Oldenburg — A physical model for the creation of the lithosphere. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 43:425–451, 1975.
- T. J. Parker — Mapping of Possible "Oceanus Borealis" Shorelines on Mars : A Status Report. In *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pages 1965–+, 1998.
- T. J. Parker, D. S. Gorsline, R. S. Saunders, D. C. Pieri et D. M. Schneeberger — Coastal geomorphology of the Martian northern plains. *J. Geophys. Res.*, 98:11061–+, 1993.

- T. J. Parker et R. S. Saunders — Origin of the lowland plains : Constraints on boundary morphology, In. *Mars : Evolution of Volcanism, Tectonism, and Volatiles, Workshop on the Nature and Composition of Surface Units on Mars, LPI Tech. Rep.*, pages 88–105, 1987.
- T. J. Parker, R. S. Saunders et D. M. Schneeberger — Transitional morphology in West Deuteronilus Mensae, Mars : Implications for modifications of the lowland/upland boundary. *Icarus*, 82:111–145, 1989.
- G. H. Pettengill, E. Eliason, P. G. Ford, G. B. Lorient, H. Masursky et G. E. McGill — Pioneer Venus radar results - Altimetry and surface properties. *J. Geophys. Res.*, 85:8261–8270, 1980.
- R. J. Phillips — Convection-driven tectonics on Venus. *J. Geophys. Res.*, 95:1301–1316, 1990.
- R. J. Phillips, R. E. Grimm et M. C. Malin — Hot-spot evolution and the global tectonics of Venus. *Science*, 252:651–658, 1991.
- R. J. Phillips, M. T. Zuber, S. C. Solomon, M. Golombek, B. M. Jakosky, W. B. Banerdt, D. E. Smith, R. M. Williams, B. M. Hynek, O. Aharonson et S. A. Hauck — Ancient Geodynamics and Global-Scale Hydrology on Mars. *Science*, 291:2587–2591, 2001.
- F. Poulet, J.-P. Bibring, J. F. Mustard, A. Gendrin, N. Mangold, Y. Langevin, R. E. Arvidson, B. Gondet et C. Gomez — Phyllosilicates on Mars and implications for early martian climate. *Nature*, 438:623–627, 2005.
- P. B. Rabus, M. Eineder, A. Roth et R. Bamler — The shuttle radar topography mission - a new class of digital elevation models acquired by spaceborne radar. *Photogramm. Rem. Sens.*, 57:241–262, 2003.
- N. J. Rappaport, A. S. Konopliv, A. B. Kucinskas et P. G. Ford — An Improved 360 Degree and Order Model of Venus Topography. *Icarus*, 139:19–31, 1999.

- J. T. Ratcliff, G. Schubert et A. Zebib — Steady tetrahedral and cubic patterns of spherical shell convection with temperature-dependent viscosity. *J. Geophys. Res.*, 101(10):25473–25484, 1996.
- C. C. Reese, V. S. Solomatov et J. R. Baumgardner — Survival of impact-induced thermal anomalies in the Martian mantle. *J. Geophys. Res.*, 107:12–1, 2002.
- C. C. Reese, V. S. Solomatov et L.-N. Moresi — Non-Newtonian Stagnant Lid Convection and Magmatic Resurfacing on Venus. *Icarus*, 139:67–80, 1999.
- D. Reiss, S. van Gasselt, G. Neukum et R. Jaumann — Absolute dune ages and implications for the time of formation of gullies in Nirgal Vallis, Mars. *J. Geophys. Res.*, 109:6007–+, juin 2004.
- Y. Ricard, L. Fleitout et C. Froidevaux — Geoid heights and lithospheric stresses for a dynamic earth. *Annales Geophysicae*, 2:267–285, 1984.
- J. H. Roberts et S. Zhong — Plume-induced Topography and Geoid Anomalies and Their Implications for the Tharsis Rise on Mars. pages 1125–+, 2004.
- C. Ronchi, R. Iacono et P. S. Paolucci — The 'Cubed Sphere' : A New Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry. *J. Comput. Phys.*, 124:93–114, 1996.
- P. Rosenblatt, P. C. Pinet et E. Thouvenot — Comparative hypsometric analysis of Earth and Venus. *Geophys. Res. Lett.*, 21:465–468, mars 1994.
- J. Ruiz, A. G. Fairén et M. A. de Pablo — Thermal Isostasy on Mars. In S. Mackwell et E. Stansbery, éditeurs — *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pages 1090–+, 2003.
- D. T. Sandwell, C. L. Johnson, F. Bilotti et J. Suppe — Driving Forces for Limited Tectonics on Venus. *Icarus*, 129:232–244, 1997.



- G. Schubert, D. L. Turcotte et P. Olson — *Mantle Convection in the Earth and Planets*. Mantle Convection in the Earth and Planets, by Gerald Schubert and Donald L. Turcotte and Peter Olson, pp. 956. ISBN 052135367X. Cambridge, UK : Cambridge University Press, September 2001., septembre 2001.
- P. Schultz et A. B. Lutz — Polar wandering of Mars. *Icarus*, 73:91–141, janvier 1988.
- A. Seiff — *Thermal structure of the atmosphere of Venus*, pages 215–279. Venus, 1983.
- L. Sichoix, A. Bonneville et M. K. McNutt — The seafloor swells and Superswell in French Polynesia. *J. Geophys. Res.*, 103:27123–27134, novembre 1998.
- W. L. Sjogren, B. G. Bills et N. A. Mottinger — Venus - Ishtar gravity anomaly. *Geophys. Res. Lett.*, 11:489–491, 1984.
- D. Smith, G. Neumann et R. Simpson — Mars Global Surveyor Laser Altimeter Initial Experiment Gridded Data Record. *NASA Planetary Data System*, 2000.
- D. E. Smith, W. L. Sjorgen, L. G. Tyler, G. Balmino et A. S. Lemoine, F. G. and Konopliv — The gravity field of Mars : Result from Mars Global Surveyor. *Science*, 286:94–97, 1999a.
- D. E. Smith, M. T. Zuber, H. V. Frey, J. B. Garvin, J. W. Head, D. O. Muhleman, G. H. Pettengill, R. J. Phillips, S. C. Solomon, H. J. Zwally, W. B. Banerdt, T. C. Duxbury, M. P. Golombek, F. G. Lemoine, G. A. Neumann, D. D. Rowlands, O. Aharonson, P. G. Ford, A. B. Ivanov, C. L. Johnson, P. J. McGovern, J. B. Abshire, R. S. Afzal et X. Sun — Mars Orbiter Laser Altimeter : Experiment summary after the first year of global mapping of Mars. *J. Geophys. Res.*, 106(15):23689–23722, 2001.
- D. E. Smith, M. T. Zuber, S. C. Solomon, R. J. Phillips, J. W. Head, J. B. Garvin, W. B. Banerdt, D. O. Muhleman, G. H. Pettengill, G. A. Neumann, F. G. Lemoine, J. B. Abshire, O. Aharonson, D. C. Brown, S. A. Hauck, A. B. Ivanov, P. J. McGovern, H. J. Zwally et T. C. Duxbury — The Global Topography of Mars and Implications for Surface Evolution. *Science*, 284:1495–1503, 1999b.

- P. Smolarkiewicz — A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. *J. Comput. Phys.*, 54:325–362, 1984.
- V. S. Solomatov — Initiation of subduction by small-scale convection. *J. Geophys. Res.*, 109, 2004.
- S. C. Solomon et J. W. Head — Evolution of the Tharsis province of Mars - The importance of heterogeneous lithospheric thickness and volcanic construction. *J. Geophys. Res.*, 87:9755–9774, 1982.
- S. C. Solomon, S. E. Smrekar, D. L. Bindschadler, R. E. Grimm, W. M. Kaula, G. E. McGill, R. J. Phillips, R. S. Saunders, G. Schubert et S. W. Squyres — Venus tectonics - an overview of Magellan observations. *J. Geophys. Res.*, 97:13199–+, août 1992.
- K. F. Sprenke, L. L. Baker et A. F. Williams — Polar wander on Mars : Evidence in the geoid. *Icarus*, 174:486–489, avril 2005.
- S. Squyres, B. Trucmuche et B. Bidulle — The Opportunity rover’s Athena Science Investigation at Meridiani Planum, Mars. *Science*, 306:1698–1703, 2004.
- K. Stemmer, H. Harder et U. Hansen — A new method to simulate convection with strongly temperature- and pressure-dependent viscosity in a spherical shell : Applications to the Earth’s mantle. *Phys. Earth Plan. Int.*, 157:223–249, août 2006.
- P. J. Tackley — Three-dimensional models of mantle convection : influence of phase transitions and temperature-dependent viscosity. *Ph.D. Thesis*, 1994.
- K. L. Tanaka, D. H. Scott et R. Greeley — *Global stratigraphy*, pages 345–382. Mars, 1992.
- D. L. Turcotte — A fractal interpretation of topography and geoid spectra on the earth, moon, Venus, and Mars. *J. Geophys. Res.*, 92:597–+, 1987.

- D. L. Turcotte, R. J. Willemann, W. F. Haxby et J. Norberry — Role of membrane stresses in the support of planetary topography. *J. Geophys. Res.*, 86:3951–3959, 1981.
- D.L. Turcotte et G. Schubert — Applications of continuum physics to geological problems. *Geodynamics*, 1982.
- L. van Gerven, F. Deschamps et R. D. van der Hilst — Geophysical evidence for chemical variations in the Australian Continental Mantle. *Geophys. Res. Lett.*, 31:17607–+, septembre 2004.
- B. Van Leer — Towards the ultimate conservative difference scheme. V - A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, pages 101–136, juillet 1979.
- V.I.A. Vangelov et G.T. Jarvis — Geometrical effects of curvature in axisymmetric spherical models of mantle convection. *J. Geophys. Res.*, 99:9345–9358, 1994.
- D. Varshalovich, A. Moskalev et V. Khersonskii — *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, 1988.
- A. Wang, L. A. Haskin, S. W. Squyres, B. L. Jolliff, L. Crumpler, R. Gellert, C. Schröder, K. Herkenhoff, J. Hurowitz, N. J. Tosca, W. H. Farrand, R. Anderson et A. T. Knudson — Sulfate deposition in subsurface regolith in Gusev crater, Mars. *J. Geophys. Res.*, 111:2–+, 2006.
- V. E. Webb — Putative shorelines in northern Arabia Terra, Mars. *J. Geophys. Res.*, 109:9010–+, 2004.
- S. A. Weinstein — The effects of a deep mantle endothermic phase change on the structure of thermal convection in silicate planets. *J. Geophys. Res.*, 100:11719–11728, 1995.
- M. A. Wieczorek — The gravity and topography of the terrestrial planets. *Treatise on Geophysics*, 2007.

- P. Withers et G. A. Neumann — Enigmatic northern plains of Mars. *Nature*, 410:651, 2001.
- M. Yoshida et A. Kageyama — Low-degree mantle convection with strongly temperature- and depth-dependent viscosity in a three-dimensional spherical shell. *J. Geophys. Res.*, 111:3412–+, mars 2006.
- D. Yuan, W. L. Sjogren, A. S. Konopliv et A. B. Kucinskas — Gravity field of Mars : A 75th Degree and Order Model. *J. Geophys. Res.*, 106:23377–23402, 2001.
- S. Zhong — Effects of lithosphere on the long-wavelength gravity anomalies and their implications for the formation of the Tharsis rise on Mars. *J. Geophys. Res.*, pages 8–1, 2002.
- S. Zhong et J. H. Roberts — On the support of the Tharsis Rise on Mars. *Earth and Planetary Science Letters*, 214:1–2, 2003.
- S. Zhong, M. T. Zuber, L. Moresi et M. Gurnis — Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection. *J. Geophys. Res.*, pages 11063–11082, 2000.
- M. T. Zuber et D. E. Smith — Mars without Tharsis. *J. Geophys. Res.*, 102(11):28673–28686, 1997.
- M. T. Zuber, S. C. Solomon, R. J. Phillips, D. E. Smith, G. L. Tyler, O. Aharonson, G. Balmino, W. B. Banerdt, J. W. Head, C. L. Johnson, F. G. Lemoine, P. J. McGovern, G. A. Neumann, D. D. Rowlands et S. Zhong — Internal Structure and Early Thermal Evolution of Mars from Mars Global Surveyor Topography and Gravity. *Science*, 287:1788–1793, mars 2000.

# Annexe A

## Description des schémas d'advection

Si l'on néglige les termes diffusifs (partie droite de l'équation), la partie advective de l'équation (3.21) page 89 peut s'écrire de la manière suivante :

$$\theta_{,t} + \frac{1}{J} \left[ (J\theta\bar{V}^r)_{,r} + (J\theta\bar{V}^\xi)_{,\xi} + (J\theta\bar{V}^\eta)_{,\eta} \right] = \theta_{,t} + \bar{V}^r\theta_{,r} + \bar{V}^\xi\theta_{,\xi} + \bar{V}^\eta\theta_{,\eta} = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $J = \frac{r^2 C^2 D^2}{\delta^{3/2}}$  est le jacobien de la transformation des coordonnées de la base cartésienne à la base associée aux coordonnées de la sphère cubique et les composantes contravariantes de la vitesse  $\bar{V}^\bullet$  se rapportent à cette base naturelle (alors que  $V^\bullet$  se réfère à la base physique, cf. Choblet (2005)). En intégrant (A.1) sur le volume  $\mathcal{V}$  de la cellule  $C$  et durant le pas de temps  $\Delta t$ , on obtient la forme conservative :

$$\frac{1}{\mathcal{V}} (\Theta^{n+1} - \Theta) + \frac{1}{J\mathcal{V}} (F(r^+) - F(r^-) + F(\xi^+) - F(\xi^-) + F(\eta^+) - F(\eta^-)) = 0 \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\Theta(r, \xi, \eta, t) = \int_C \theta(r', \xi', \eta', t) dV, \quad (\text{A.3})$$

et

$$F(r, \xi, \eta, t) = \int_t^{t+\Delta t} \int_{S^I} J(r', \xi', \eta', t') \bar{V}^I(r', \xi', \eta', t') \theta(r', \xi', \eta', t') dS^I dt, \quad (\text{A.4})$$

où l'index  $I$  se rapporte à la direction ( $r, \xi$  ou  $\eta$ ) tel que  $S^I$  est la surface de la cellule  $C$  correspondante à  $I = \text{constante}$  (sauf explicitement écrit, les coordonnées sont  $r, \xi, \eta, t$ ).

Considérons à présent le problème discret ; la méthode de maillage entrelacé est utilisée de telle manière que les vitesses  $\bar{V}^I$  sont localisées sur le bord des cellules (correspondant à  $r_i^-, r_i^+, \xi_j^-, \xi_j^+, \eta_k^-, \eta_k^+$ ) et les quantités scalaires au centre (correspondant à  $r_i, \xi_j, \eta_k$ ) (cf. Choblet (2005)). L'approche de Godunov (Godunov (1959)) consiste alors à introduire une fonction constante dans le volume  $C$  mais variant dans le temps :  $T_{ijk}^n(t)$ . Nous obtenons alors pour le flux discret sur les bords des cellules :

$$F^I = S^I J \bar{V}^I \int_t^{t+\Delta t} T(t') dt \quad (\text{A.5})$$

(ici et pour les lignes suivantes, sauf explicitement écrit, les index sont  $i, j, k, n$ ).

Le schéma *amont* correspond alors au choix d'une valeur constante pour  $T$  correspondant soit à la valeur  $\theta$  de 'gauche' ou de 'droite', en fonction du signe de  $\bar{V}^I$ , e.g.,

$$F^{r-} = \begin{cases} \Delta l^\xi \Delta l^\eta \Delta t J \bar{V}^r \theta & \text{si } \bar{V}^r > 0, \\ \Delta l^\xi \Delta l^\eta \Delta t J \bar{V}^r \theta_{i-1} & \text{si } \bar{V}^r < 0. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

avec  $\Delta l^\xi, \Delta l^\eta$  la dimension de la cellule.

Une meilleure précision (second ordre) peut être obtenue en utilisant une fonction (tri)linéaire pour  $T$ , en introduisant les pentes  $\sigma^r, \sigma^\xi, \sigma^\eta$ , constantes dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  :

$$T(r, \xi, \eta, t) = \theta_{ijk}^n + \sigma_i^r (r - r_i) + \sigma_j^\xi (\xi - \xi_j) + \sigma_k^\eta (\eta - \eta_k). \quad (\text{A.7})$$

Il est à noter que  $\sigma^\bullet = 0$  correspond à la méthode amont de Godunov.

Les choix classiques pour la pente utilisant une méthode centrée (e.g.,  $\sigma^r = (\theta_{i+1} - \theta_{i-1})/2\Delta r$ , Fromm), amont (e.g.,  $\sigma^r = (\theta_i - \theta_{i-1})/\Delta r$ , Beam-Warming) ou aval (e.g.,  $\sigma^r = (\theta_{i+1} - \theta_i)/\Delta r$ , Lax-Wendroff) peuvent cependant induire des oscillations dans les régions à forts gradients  $\theta$  : dans ce cas, une manière d'éviter ces oscillations est de limiter les valeurs des pentes. La solution de Van Leer (Van Leer (1979)) est alors

de considérer le "monotonized central-difference limiter" (ou MC-limiter) défini de la manière suivante (par exemple dans la direction  $r$ ) :

$$\sigma^r = \minmod \left( \left( \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta r} \right), \left( 2 \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta r} \right), \left( 2 \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta r} \right) \right). \quad (\text{A.8})$$

avec la fonction *minmod* :

$$\minmod(a, b, c) = \begin{cases} \text{sign}(a) \min(a, b, c) & \text{si } a \leq b \leq c \text{ ou } a \geq b \geq c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Une autre solution est de calculer la pente à partir d'une moyenne géométrique :

$$\sigma^r = \begin{cases} \frac{2(\theta_{i+1} - \theta_i)(\theta_i - \theta_{i-1})}{(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})\Delta r} & \text{si } \theta_{i-1} \leq \theta_i \leq \theta_{i+1} \text{ ou } \theta_{i-1} \geq \theta_i \geq \theta_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Le schéma *MPDATA* (ou Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm) corrige la procédure *amont* classique en la réappliquant avec un champ de vitesse anti-diffusif. Ce dernier est dérivé de l'analyse de l'erreur de troncature du schéma *amont* en supposant un flux uniforme. Cette procédure peut évidemment être appliquée de façon à obtenir une bonne précision, itérativement (cf. Smolarkiewicz (1984)). Cette méthode a été utilisée avec succès pour la modélisation de la dynamique du manteau dans un domaine cartésien. Cependant, dans le domaine de la sphère cubique, ces étapes de correction demandent un temps de calcul conséquent.





# Annexe B

## Méthode spectrale

### B.1 Passage de l'expression complexe à l'expression réelle

$$\begin{aligned} a(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_{l0} Y_{l0}(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) + \sum_{m=-l}^{-1} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

propriété :

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \phi) &= Y_{l-m}^*(\theta, \phi)(-1)^m \text{ et } a(\theta, \phi) = a^*(\theta, \phi) \\ a(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^* Y_{lm}^* = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^* Y_{l-m}(-1)^m \end{aligned}$$

posons  $n=-m$

$$a(\theta, \phi) = a^*(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l a_{l-n}^* Y_{ln}(-1)^n$$

Par identification, nous voyons que :

$$a_{lm} = a_{l-n}^*(-1)^n = a_{l-m}^*(-1)^m$$

L'expression (B.1) s'écrit alors :

$$a(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_{l0} Y_{l0}(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) + \sum_{m=-l}^{-1} a_{l-m}^*(-1)^m Y_{l-m}^*(\theta, \phi)(-1)^m \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_{l0} Y_{l0}(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^l a_{lm}^* Y_{lm}^*(\theta, \phi) \right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_{l0} Y_{l0}(\theta, \phi) + 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^l a_{lm} Y_{lm} \right)
\end{aligned}$$

**Relation entre les coefficients HS réels et complexes**

$$\begin{aligned}
V(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos m\phi + S_{lm} \sin m\phi) P_{lm}(\cos \theta) \\
m=0; C_{l0} &= \frac{V_{l0}}{\sqrt{4\pi}} \\
m>0; C_{lm} &= (-1)^m \frac{\operatorname{Re}(V_{lm})}{\sqrt{2\pi}}; S_{lm} = (-1)^{m+1} \frac{\operatorname{Im}(V_{lm})}{\sqrt{2\pi}} \\
V_{l0} &= \sqrt{4\pi} C_{l0}; V_{lm} = \sqrt{2\pi} (-1)^m (C_{lm} - i S_{lm})
\end{aligned}$$

**Relation d'orthonormalité**

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{jm}(\theta, \phi) Y_{kl}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{jk} \delta_{ml}$$

$\delta_{jm}$  représente la fonction de Kronecker (=1 si  $j = m$ , 0 sinon).

## B.2 Analyse spectrale

### Spectre de puissance

Le spectre de puissance d'une fonction permet d'estimer la contribution des différentes longueurs d'ondes à cette même fonction.

$$|f_l|^2 = \sum_{m=-l}^l f_{lm} f_{lm}^* = f_{l0} f_{l0} + 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^l f_{lm} f_{lm}^*$$

### Corrélation

La corrélation est une mesure de la relation linéaire entre deux fonctions.

$$\frac{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} g_{lm}^*}{\sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} f_{lm}^* \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^k g_{kn} g_{kn}^*}}$$

avec

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} g_{lm}^* = \sum_{l=0}^{\infty} (f_{l0} g_{l0} + 2Re \sum_{m=1}^l f_{lm} g_{lm})$$

## Corrélation par degré

$$C_l = \frac{\sum_{m=-l}^l f_{lm} g_{lm}^*}{\sqrt{\sum_{m=-l}^l f_{lm} f_{lm}^* \sum_{m=-l}^l g_{lm} g_{lm}^*}}$$

## Admittance

$$\left\{ \begin{array}{l} g \\ U \\ h \end{array} \right. = \underbrace{A.to}_{\text{partie corrélée}} + \underbrace{u}_{\text{partie non corrélée}}$$

$$a_l = \frac{\sum_{m=-l}^l t_{lm} h_{lm}^*}{\sum_{m=-l}^l t_{lm} t_{lm}^*} = \frac{t_{l0} h_{l0} + 2Re \sum_{m=1}^l t_{lm} h_{lm}^*}{t_{l0} t_{l0} + 2Re \sum_{m=1}^l t_{lm} t_{lm}^*}$$



# Liste des notations utilisées

symbole	définition	unités
$\alpha$	dilatation thermique	$K^{-1}$
$C_p$	capacité calorifique	$J.K^{-1}.kg^{-1}$
$d$	épaisseur de la coquille	m
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker (1 si i=j, 0 sinon)	-
$\Delta \rho_c$	contraste de densité	$kg.m^{-3}$
$\Delta T$	différence de température à travers la coquille	K
$f$	rapport entre les deux rayons, $f = r_b/r_t$	-
$g$	accélération gravitationnelle	$m.s^{-2}$
$G$	constante de gravitation universelle	$m^3.s^{-2}.kg^{-1}$
$G_r$	paramètre gravitationnel adimensionné	-
$\gamma$	paramètre exponentiel de viscosité	-
$H, h$	chauffage volumétrique, variable adimensionnée	$W.m^{-3}$ , -
$k$	conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\kappa$	diffusivité thermique	$m^2.s^{-1}$
$\mu, \mu_0$	viscosité adimensionnée, viscosité de surface (référence)	-, Pa.s
$\tilde{N}, N$	hauteur du géoïde, variable adimensionnée	m, -
$N^g$	nombre de cellules de la grille	-
$p^*$	pression adimensionnée	-
$Q$	énergie d'activation	$J.mol^{-1}.K^{-1}$

$\mathbf{r}$	vecteur radial unitaire	-
$\tilde{r}_b, r_b$	rayon interne, variable adimensionnée	m, -
$\tilde{r}_t, r_t$	rayon externe, variable adimensionnée	m, -
$\rho_0$	densité de surface (référence)	$kg.m^{-3}$
$Ra, Ra_i$	Rayleigh de surface, Rayleigh interne	-
$S$	paramètre topographique adimensionné	-
$\tilde{\sigma}_{rr}, \sigma_{rr}$	contrainte radiale, variable adimensionnée	Pa, -
$\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rr}$	contrainte radiale, variable adimensionnée	Pa, -
$T$	température adimensionnée	-
$\tilde{t}_s, t_s$	topographie dyn. de surface, variable adimensionnée	m, -
$\tilde{t}_c, t_c$	topographie dyn. CMB, variable adimensionnée	m, -
$\tau$	partie déviatorique du tenseur des contraintes	-
$\theta, \phi$	coordonnées sphériques (co-latitude, longitude)	-
$\tilde{U}, U$	potentiel gravitationnel, variable adimensionnée	$m^2.s^{-2}$ , -
$\tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{V}$	champ de vitesse, variable adimensionnée	$m.s^{-1}$ , -
$V$	volume d'activation	$m^3.mol^{-1}$
$\xi, \eta, \Delta\xi, \Delta\eta$	coordonnées ang. de la sphère cubique, incréments ang.	-
$X, Y, \delta, C, D$	coordonnées auxiliaires de la sphère cubique	-
$Y_{lm}$	fonction harmonique sphérique de degré $l$ et d'ordre $m$	-
$\bullet_{lm}$	coeff. de la variable $\bullet$ associée au degré $l$ et à l'ordre $m$	-

---

# Table des figures

1.1	<i>Géoïde et topographie de la Terre (d'après Wieczorek (2007)). . . . .</i>	6
1.2	<i>Spectre de puissance de la topographie (trait plein) et du géoïde (pointillés) de la Terre. . . . .</i>	7
1.3	<i>Spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et de la gravité de la Terre (figure extraite de Wieczorek (2007)). . . . .</i>	8
1.4	<i>Vue radar de la surface de Vénus par la sonde Magellan. . . . .</i>	10
1.5	<i>Géoïde et topographie de Vénus (d'après Wieczorek (2007)). . . . .</i>	11
1.6	<i>Spectre de puissance de la topographie de Vénus. En pointillés : le spectre terrestre correspondant. . . . .</i>	14
1.7	<i>Spectre de puissance du géoïde de Vénus. En pointillés : le spectre terrestre correspondant. . . . .</i>	15
1.8	<i>Spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et de la gravité de Vénus (figure extraite de Wieczorek (2007)). . . . .</i>	15
1.9	<i>Vue globale de Mars reconstituée à partir des images Viking. . . . .</i>	17
1.10	<i>Géoïde et topographie de Mars (d'après Wieczorek (2007)). . . . .</i>	18
1.11	<i>Gravité à l'air libre de Mars (modèle jgm85). . . . .</i>	19
1.12	<i>Spectre de puissance de la topographie de Mars. En pointillés : le spectre terrestre correspondant. . . . .</i>	23
1.13	<i>Spectre de puissance du géoïde de Mars. En pointillés : le spectre terrestre correspondant. . . . .</i>	23

1.14	<i>Spectres d'admittance et de corrélation de la topographie et de la gravité de Mars (figure extraite de Wieczorek (2007)). . . . .</i>	24
2.1	<i>Rayon au centre de masse de Mars. . . . .</i>	28
2.2	<i>Aréoïde recalculé par la méthode définie dans la section 2.1.1. . . . .</i>	29
2.3	<i>Topographie de Mars déterminée à partir de l'aréoïde représenté sur la figure 2.2. . . . .</i>	29
2.4	<i>Anomalie de l'aréoïde par rapport à l'ellipsoïde tri-axial. . . . .</i>	32
2.5	<i>Anomalies de gravité sur Isidis et Hellas. . . . .</i>	34
2.6	<i>Potentiel de pesanteur de Mars. . . . .</i>	35
2.7	<i>Principaux contacts identifiés sur Mars (Parker (1998); Clifford et Parker (2001)). . . . .</i>	37
2.8	<i>Vue globale de la ligne de rivage Deuteronilus autour du pôle Nord. . .</i>	38
2.9	<i>Image visible Thémis V01361004 présentant les contacts Arabia et Deuteronilus. . . . .</i>	39
2.10	<i>Haut : Potentiel de pesanteur en fonction de la longitude le long de la ligne de rivage Deuteronilus. En vert, la fonction sinus de l'hémisphère Est. En bleu la fonction sinus globale. Les paramètres des fonctions sinus sont regroupés dans le tableau (2.4). Bas : Variation du rayon au centre de masse le long de Deuteronilus. . . . .</i>	41
2.11	<i>Potentiels de pesanteur développés au degré 2 (<math>\times</math>) et 60 (+) le long de la ligne de rivage Deuteronilus. . . . .</i>	42
2.12	<i>Profils équatoriaux de la topographie et du géoïde martiens. La ligne rouge indique la longitude du potentiel de pesanteur minimum le long de Deuteronilus (<math>75^\circ</math>). . . . .</i>	44
2.13	<i>Localisation des extrema du potentiel de pesanteur le long de Deuteronilus.</i>	45



2.14	<i>Haut : potentiel de pesanteur corrigé. En pointillés, la fonction sinus dont les paramètres sont regroupés dans le tableau (2.5). Bas : profils équatoriaux du rayon au centre de masse de Mars (trait plein) et de l'ellipsoïde tri-axial calculé en section (2.1.2).</i>	46
2.15	<i>Potentiel de pesanteur corrigé (hémisphère Est). En pointillés, la fonction sinus utilisée pour la détermination des frontières géographiques de l'océan martien.</i>	48
2.16	<i>Localisation et profondeur de l'océan martien associé à Deuteronilus.</i>	49
2.17	<i>Carte simplifiée des âges géologiques martiens basés sur la densité de cratères (Source Malin Space Science System).</i>	51
2.18	<i>Localisation des minéraux hydratés identifiés par le spectromètre OMEGA de la sonde européenne Mars Express. En rouge, les phyllosilicates. En bleu, les sulfates. En jaune, divers minéraux hydratés. (d'après Bibring et al. (2006)).</i>	52
2.19	<i>Localisation des argiles découvertes par Mars Express dans Mawrth Vallis.</i>	53
2.20	<i>Localisation des sulfates découverts par Mars Express.</i>	55
2.21	<i>Représentation schématique de l'histoire de l'altération des minéraux de Mars (d'après Bibring et al. (2006)).</i>	56
2.22	<i>Topographie terrestre.</i>	59
2.23	<i>Haut : distribution hypsométrique globale de la topographie de la Terre. Bas : la même distribution corrigée de l'effet de charge des océans. La ligne noire représente l'hypsométrie de la topographie dont le degré 1 a été retiré.</i>	60
2.24	<i>Distribution hypsométrique cumulée de la topographie de la Terre corrigée de l'effet de charge des océans (pointillés).</i>	62
2.25	<i>Topographie de Vénus.</i>	63
2.26	<i>Distribution hypsométrique globale de la topographie de Vénus.</i>	64
2.27	<i>Distribution hypsométrique cumulée de la topographie de Vénus.</i>	65

2.28	<i>Distribution hypsométrique globale de la topographie de Mars (histogramme). La ligne noire représente l'hypsométrie de la topographie dont le degré 1 a été retiré. . . . .</i>	66
2.29	<i>Topographie martienne. En bas, la même topographie dont le degré 1 a été retiré. . . . .</i>	67
2.30	<i>Localisation des zones modales de la courbe d'hypsométrie globale de la topographie de Mars représentée sur la figure 2.28. La zone bleue correspond aux limites -5000/-3500 m et la zone jaune aux limites 500/2500 m. . . . .</i>	68
2.31	<i>Distribution hypsométrique cumulée de la topographie de Mars. Les droites soulignent les domaines de linéarité. En jaune : Limite topographique du Contact 2 identifié par Parker et al. (1993). Les domaines linéaires disparaissent si l'on retire le degré 1 de la topographie. . . . .</i>	69
2.32	<i>Localisation des deux domaines de linéarité identifiés sur la figure (2.31). En jaune : le domaine de linéarité 1. En bleu : le domaine de linéarité 2. La ligne blanche représente le niveau zéro de la topographie. . . . .</i>	70
3.1	<i>Le 'problème au pôle' : la singularité engendrée par la convergence des méridien entraîne l'apparition de termes non-bornés dans les équations de conservation. . . . .</i>	79
3.2	<i>Construction d'un sixième de sphère par la méthode des Grands Cercles. . . . .</i>	80
3.3	<i>Système de coordonnées de la sphère cubique. Le point M situé sur la sphère est localisé par les coordonnées angulaires <math>\xi</math> et <math>\eta</math> associées à deux grands cercles correspondant aux lignes verticale (<math>\xi</math>) et horizontale (<math>\eta</math>) à la surface. . . . .</i>	81
3.4	<i>Représentation tri-dimensionnelle du maillage de la sphère-cubique. . . . .</i>	82

3.5	<i>Positions et notations des coordonnées discrètes du système de la sphère cubique. Le point noir au centre de la cellule correspond à la position de la température, de la pression et de la viscosité. Les symboles <math>X</math> au centre des parois de la cellule indiquent la position des coordonnées de vitesse. . . . .</i>	83
3.6	<i>Modification des coordonnées des blocs de la sphère cubique. La sphère est ici dépliée pour faciliter l'identification des différents blocs et leur système de coordonnées <math>\xi</math> et <math>\eta</math> associé. . . . .</i>	85
3.7	<i>Interpolation entre deux blocs adjacents. (a) Configuration globale des lignes de coordonnées. Le bloc adjacent à la limite <math>\xi = -\pi/4</math> (ligne en pointillés) partage deux des coordonnées de la sphère cubique (<math>r</math> et <math>\xi</math>), mais la coordonnée <math>\eta</math> ne coïncide pas sur les deux blocs. (b) Positions discrètes de la grille à la frontière : une simple interpolation 1D suffit pour transmettre les paramètres de température et de vitesses d'un bloc à l'autre. Les coordonnées de vitesses sont représentées par des croix et celles de la température par des sphères (pleines pour le bloc de droite, vides pour le bloc de gauche). . . . .</i>	86
3.8	<i>Rapport de surface du maillage de la sphère cubique (normalisé à 1 au centre). . . . .</i>	87
3.9	<i>Méthode des plans tampons : les données nécessaires aux processeurs sont stockées localement. . . . .</i>	91
3.10	<i>Représentation schématique de la communication inter-blocs dans le système de la sphère cubique. . . . .</i>	92
3.11	<i>Exemple d'évolution temporelle des vitesses et de la température moyenne. . . . .</i>	94
3.12	<i>Flux mantelliques induits par des anomalies de masses positives (bleu) et négatives (rouge). Les mouvements de matière engendrés déforment à la fois la surface et la limite noyau-manteau. . . . .</i>	96
3.13	<i>Architecture de base de Data Explorer. . . . .</i>	101
3.14	<i>Exemple de fenêtre graphique sous Data Explorer. . . . .</i>	102

4.1	<i>Profils de température des cas présentés dans le tableau (4.2).</i>	110
4.2	<i>Champs de température 3D des cas présentés dans le tableau (4.2).</i>	112
4.3	<i>Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 1.</i>	113
4.4	<i>Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 2.</i>	114
4.5	<i>Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 3.</i>	114
4.6	<i>Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 4.</i>	115
4.7	<i>Topographie dynamique de surface et géoïde obtenus pour le cas n° 5.</i>	115
4.8	<i>Spectres de puissance de la topographie dynamique de surface (trait plein) et du géoïde (pointillés) obtenus pour les cas présentés dans le tableau (4.2).</i>	118
4.9	<i>Topographie (haut) et géoïde (bas) de Vénus développés au degré 30.</i>	121
4.10	<i>Spectres de puissance adimensionnés de la topographie (trait plein) et du géoïde (pointillés) de Vénus, du cas isovisqueux (cas n°1) et du cas du couvercle conducteur (cas n°5).</i>	122

# Liste des tableaux

2.1	<i>Potentiels de référence pour la détermination de l'aréoïde martien. . . .</i>	29
2.2	<i>Paramètres géodésiques utilisés pour le calcul de l'ellipsoïde tri-axial. .</i>	30
2.3	<i>Paramètres de l'ellipsoïde tri-axial. . . . .</i>	32
2.4	<i>Valeurs des paramètres des fonctions sinus <math>f(x) = a + b\sin(cx + d)</math> de la figure (2.10) (<math>x</math> est donné en radians). . . . .</i>	40
2.5	<i>Valeurs des paramètres de la fonction sinus <math>f(x) = a + b\sin(cx + d)</math> représentée sur la figure (2.14) (<math>x</math> est donné en radians). . . . .</i>	44
2.6	<i>Valeurs des paramètres de la fonction sinus <math>f(x) = a + b\sin(cx + d)</math> représentée sur la figure (2.15) (<math>x</math> est donné en radians). . . . .</i>	48
2.7	<i>Caractéristiques de l'océan martien associé à Deuteronilus. . . . .</i>	49
2.8	<i>Échelle des temps géologiques de Mars (Hartmann (2005)). . . . .</i>	51
2.9	<i>Paramètres de régression linéaire des courbes d'hypsométrie cumulée de la topographie des planètes telluriques. . . . .</i>	71
3.1	<i>Le système de coordonnées modifiées de la sphère cubique. . . . .</i>	84
4.1	<i>Haut : estimation des valeurs des paramètres sans dimension <math>S</math> et <math>G_r</math> et des caractéristiques de plusieurs corps du système solaire. Les valeurs surlignées correspondent aux extrema de <math>S</math> et <math>G_r</math>. Bas : classement des différents corps du système solaire basé sur les nombres sans dimension <math>S</math> et <math>G_r</math>. . . . .</i>	106

4.2 *Liste des cas présentés avec leurs paramètres adimensionnés : nombre de Rayleigh ( $Ra$ ), contraste de viscosité ( $\gamma$ ), chauffage volumétrique ( $H$ ), nombre de Nusselt  $Nu$ , taille de la grille et nombre de Rayleigh interne ( $Ra_i$ ).* . . . . . 107







# **ŒDIPUS: a new tool to study the dynamics of planetary interiors**

G. Choblet<sup>1</sup>, O. Čadek<sup>2</sup>, F. Couturier<sup>1</sup> and C. Dumoulin<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>*Laboratoire de planétologie et géodynamique, UMR 6112, CNRS-Université de Nantes, Nantes, France*

<sup>2</sup>*Department of Geophysics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Prague, Czech Republic*

## **SUMMARY**

We present a new numerical method to describe the internal dynamics of planetary mantles through the coupling of a dynamical model with the prediction of geoid and surface topography. Our tool is based on the simulation of thermal convection with variable viscosity in a spherical shell with a finite-volume formulation. The grid mesh is based on the ‘cubed sphere’ technique that divides the shell into six identical blocks. An investigation of various numerical advection schemes is proposed: we opted for a high-resolution, flux-limiter method. Benchmarks of thermal convection are then presented on steady-state tetrahedral and cubic solutions and time-dependent cases with a good agreement with the few recent programs developed to solve this problem.

A dimensionless framework is proposed for the calculation of geoid and topography introducing two dimensionless numbers: such a formulation provides a good basis for the systematic study of the geoid and surface dynamic topography associated to the convection calculations. The evaluation of geoid and surface dynamic topography from the gridded data is performed in the spectral domain. The flow solver is then tested extensively against a precise spectral program, producing response functions for geoid as well as bottom and surface topographies. For a grid mesh of a reasonable size ( $6^{\circ}64^{\circ}64^{\circ}64^{\circ}$ ) a very good agreement (to within  $\sim 1\%$ ) is found up to spherical harmonic degree 15.

**Key words:** planetary mantles, internal dynamics, geoid, dynamic topography, numerical models

## 1 INTRODUCTION

Several of today's questions in the study of planetary interiors imply the use of models simulating thermal convection in a spherical geometry. This is often implicitly required by the internal dynamics: the effect of the curvature of a boundary layer on thermal instabilities and heat flux budget is likely to play a major role in the nature of the volcanism of Venus. Spherical geometry is also important when scaling mass flux and may be crucial for models where compositional gradients are considered. This seems necessary to understand the history and dynamics of the Moon or the Earth. Modelling plate motion on a sphere also implies the use of a spherical upper surface for mantle convection models: this is true not only for the Earth's (or early Mars) plate tectonics but also when addressing the geometry of large scale features such as the ridges recently observed by the Cassini spacecraft on the south pole of Saturn's satellite, Enceladus. Tidal heating which is probably responsible for the global dynamics of several other satellites of Saturn and Jupiter (e.g., Io, Europa, Titan) is also naturally expressed in a spherical basis. Moreover, models developed in a spherical geometry allow a better comparison with geophysical data obtained from space exploration often expressed as a decomposition into spherical harmonics (for example, the significant correlation between Venus' geoid and topography at long wavelengths can be better understood when studied in spectral domain. In addition, in order to address many of the problems mentioned above, a numerical model of thermal convection should handle large viscosity gradients: i) the effective viscosity of silicates or ices is very sensitive to thermodynamical parameters, inducing very specific dynamical regimes such as the asymptotic conductive lid regime (e.g. Davaille & Jaupart, 1993); ii) in order to mimic the plate behaviour, more complex rheologies have been proposed that imply even larger viscosity gradients (e.g. Tackley (2000a; 2000b); see also Bercovici (2003) for a review).

The first programs simulating thermal convection in a spherical shell were based on a spectral approach (Glatzmaier, 1988; Zhang & Yuen, 1995) since this allows an elegant treatment in the case of a viscosity field that is constant or radius-dependent. However, these methods lose part of their interest in the case of large lateral viscosity variations. A first attempt to solve variable viscosity convection with a grid-based method is proposed by Hsui et al. (1995) after a finite element discretization developed in the isoviscous case (program Terra) by Baumgardner (1985). Another technique based on spherical coordinates is proposed by Ratcliff et al. (1996). To the authors' knowledge, the first robust program solving Stokes flow and thermal convection in a spherical shell for a fluid with strongly

variable viscosity (CITCOMs) is then presented by Zhong et al. (2000). Based on the finite element program CITCOM (Moresi & Gurnis, 1996), this version uses brick elements (8 nodes) and the sphere is divided in 12 blocks of approximately equal size. This mesh is well suited for parallel computing and the FEM formulation ensures the robustness of the program. Though it seems necessary to have several different tools to solve this problem (especially when spherical shell laboratory experiments are not a simple set-up to build), new numerical solutions have not been proposed until very recently. In the framework of finite volumes or finite differences methods, the necessity to propose complex non-conform meshes to solve the pole problem for the spherical geometry induced a relatively heavy computational treatment. Alternatively, the more precise and more “elegant” spectral formulation for such a geometry (through the use of spherical harmonic functions) loses a significant part of its interest when azimuthal viscosity variations are introduced. Three finite volume formulations have been proposed recently (Kageyama & Sato, 2004; Choblet, 2005; Stemmer et al., 2006) all resulting mainly from a new geometrical treatment. The first one, based on the ‘Yin Yang’ grid uses the classical spherical coordinate system and the poles are excluded. The two latter ones use a decomposition of the sphere into six blocks obtained through the projection of a cube, the “cubed sphere” decomposition (while among the five platonic solids, Terra used the icosaedron) and either formulate the equations directly in the natural (but non-orthogonal) coordinate system (Choblet, 2005) or uses the Cartesian coordinates of a “smoothed cubed sphere” mesh where the non-orthogonal aspect is reduced iteratively (Harder & Hansen, 2005; Stemmer et al., 2006).

Observational constraints on the style of thermal convection in planetary bodies are still rare. Two potentially important sources of information about the internal dynamics of a planet are the geoid and topography. In a viscous mantle, the stresses arising from mantle flow deform all density interfaces, including the surface. The pattern of such a “dynamic” topography and its magnitude bear evidence about the viscosity structure of the planet, the mass flux through the major internal interfaces and the characteristic wavelength of mantle convection (e.g. Schubert et al., 2001). Important information about mantle convection can also be contained in the observed gravitational field which is a superposition of the gravitational signal due to density heterogeneities inside the body and the signals of density interfaces (surface, core-mantle boundary, etc.) which may be deflected by mantle flow (Ricard et al., 1984; Hager & Clayton, 1989; King, 1995). Prediction of the long-wavelength component of the geoid requires the integration of mass anomalies over the whole body and can only be done in a spherical geometry. This integration can significantly be simplified if the density anomalies and dynamic topographies are expressed in terms of series of spherical harmonic functions (Burša & Pěč, 1993). That is why the momentum equation has often been solved in a spectral domain which allows the equations governing the flow to be directly coupled with the Laplace-Poisson equation for the gravitational po-

tential (Ricard et al., 1984; Hager & Clayton, 1989). Unfortunately, as already mentioned, the spectral methods are not suitable in the case of models with large lateral viscosity variations (Čadek & Fleitout, 2003). In the present paper, we therefore combine the solution of the Navier-Stokes equation in a finite volume formulation with a spectral method used for evaluating the dynamic topography and the geoid.

ŒDIPUS (Origin, Evolution and Dynamics of the Interiors of Planets Using Simulation) may seem a rather grandiloquent acronym for the tool we present in this article (may the authors be forgiven for this !): as indicated in section 2 we so far focus on the purely thermal convection aspect (2.1) with temperature-dependent rheology (2.2) of planetary interior dynamics. Our final objective is however to include the compositional aspect in the program (2.3). The numerical methods are described in section 3: a new version of the ‘cubed sphere’ mesh is presented (3.1), the flow solver, already described by Choblet (2005), is shortly evoked (3.2) and the advection scheme, problematic in this non-orthogonal coordinate system (see the remarks by Hernlund and Tackley, 2003) is discussed (3.3). For the sake of clarity, we describe the treatment of the geoid and the dynamic topography in an independent section (4) since the formalism (non canonical dimensionless problem) and the numerical method (based on a decomposition in the spectral domain) are specific. The last section (5) compiles tests we performed to ensure the validity of the method, concerning the flow solver, thermal convection and our computation of geoid and dynamic topography.

## 2 PHYSICAL MODEL

### 2.1 Thermal convection

We solve the classical conservation equations describing thermal convection of a variable viscosity, infinite Prandtl number fluid in the Boussinesq approximation (aside from the viscosity variations) here expressed in their dimensionless form:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1)$$

$$0 = -\nabla p^* + \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t \right) - Ra T \mathbf{r}. \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + h. \quad (3)$$

$Ra = (\alpha \rho_0 g \Delta T d^3) / (\kappa \mu_0)$  is the surface Rayleigh number and  $h = \tilde{h} d^2 / k \Delta T$  is the dimensionless heating rate (in the whole article,  $\bullet$  denotes the dimensionless variable while  $\tilde{\bullet}$  stands for the variable with a physical dimension; see Table 1 for the notations). Note that dimensionless length variables (mostly  $r$ ) are scaled using  $d$  (and not the radius of the outer layer): dimensionless radii thus vary from  $r_b = f / (1 - f)$  to  $r_t = 1 / (1 - f)$  where  $f = r_b / r_t = \tilde{r}_b / \tilde{r}_t$  is the ratio between the radii of the inner ( $\tilde{r}_b$ ) and outer ( $\tilde{r}_t$ , radius of the planet) shells.

[Table 1 about here.]

## 2.2 Rheology

The temperature dependence of viscosity is modelled in the present study in terms of a simple exponential function:

$$\mu = e^{-\gamma T}. \quad (4)$$

where  $\gamma$ , the viscosity parameter, is the fourth dimensionless parameter introduced in the study of variable viscosity convection in a spherical shell (besides  $Ra$ ,  $h$ ,  $f$ ). Relationship (4) is often used in mantle-convection studies so that a comparison with earlier results is easier. Such an approximation of the Arrhenius law ( $\mu = e^{\gamma'/T}$ ) considered to describe the effective viscosity of rocks and ices due to solid-state thermally activated creep is termed the Frank-Kamenetskii approximation (Frank-Kamenetskii, 1969). In the case of the stagnant lid regime, most of the viscosity variations occur in the cold conductive layer at the surface. Thus, if the two functions are scaled properly, heat transfer and flow are not much affected by the strong difference in the cold conductive region (Reese et al., 1999). A more important point in the context of the present study concerns stress in the conductive lid (where the two viscosity laws differ significantly) since it is used to compute geoid and dynamic topography (see 4.1). A recent study by Solomatov (2004) indicates that the stress distribution in the lid is similar for the two laws except within a thin layer beneath the surface.

As mentioned earlier, more realistic aspects can certainly be proposed when dealing with planetary dynamics in terms of rheology: the stress or grain-size dependence, the influence of water (among other volatiles) or melt fraction, and the necessity to incorporate more exotic rheologies to produce plate-like behaviour. However, these complexities are mostly conceptual ones: the aim of the present study being to describe the numerical tool, all the above complexities may possibly be described by our numerical method as long as it handles large enough viscosity gradients (with the notable exception of anisotropic viscosity).

## 2.3 (No) compositional dynamics

It is now well established that density and viscosity gradients of compositional origin in the Earth's mantle are likely to play a significant role (i.e. as important as the thermal ones) in its dynamics, at least in two crucial regions: the lithosphere (both continental, e.g. van Gerven et al. (2004), and oceanic, e.g. Choblet & Parmentier, 2001) and the deepest part of the lower mantle (e.g. Ishii & Tromp, 2004; Deschamps & Trampert, 2004). It is also believed that most of the lunar interior dynamics subsequent to the freezing of a primordial magma ocean are mostly shaped by compositional stratification and

overturn (e.g. Hess & Parmentier, 1995). Moreover, some elements such as radioactive elements and volatiles in silicates and impurities in ices, even if they do not affect density nor viscosity due to very small concentrations, play an important role in the study of the evolution of planets. A recent good example is the enigma of the methane content of Titan’s atmosphere, maybe of internal origin (Tobie et al., 2006). All these effects have direct consequences on the geoid and topography.

For all these reasons, it seems important that dynamical models include the possibility of the transport of chemical species through the pure advection of a scalar field with the flow (this would also enable the description of the transport of physical quantities such as grain size). Such a program simulating thermochemical convection in a spherical shell is developed for the first time by McNamara & Zhong (2004). Though the advection scheme proposed in the present tool is built to minimize numerical diffusion (see 3.3), even this small diffusion might not be acceptable when the real diffusion is negligible. In the framework of our program, we believe that the most appropriate method may be the tracers method described by Tackley and King (2003) rather than more complex ‘surface reconstruction methods’. Indeed, though the grid mesh is not strictly uniform and though the coordinates system is not orthogonal, both the algorithm proposed by Tackley and King (2003) in a cartesian context and the properties of the method are conserved.

### 3 NUMERICAL METHOD

In this section, we mostly refer to the finite volume method used to solve the thermal convection problem. The mesh (3.1) and the techniques used in the flow solver (3.2) are already described in an earlier paper (Choblet, 2005). New aspects developed here are mostly a new orientation of the coordinate system (cf. 3.1), a benchmark of advection schemes in the cubed sphere context (3.3) and the communication between blocks (cf. Appendix B).

#### 3.1 Mesh

[Figure 1 about here.]

The cubed sphere method proposed by Ronchi et al. (1996) is first designed to avoid coordinate singularities at the poles. Other interesting aspects of the method are: (i) the fact that the physical grid defined on the spherical surface is reasonably close to a uniform grid, (ii) the decomposition of the spherical shell into six identical regions, with the same metric and (iii) an efficient parallel implementation. The mapping of the spherical surface is obtained by the projection of the sides of a circumscribed cube onto this surface. Fig. 1 illustrates this technique and introduces the cubed sphere coordinate system  $(r, \xi, \eta)$ . Note that it is not an orthogonal system. In addition it appears that angular

coordinates  $\xi$  and  $\eta$  are such that a symmetry between them is expected in all equations. We explicitly write the equations in this coordinate system in the program, thus avoiding the computation of the metric tensor elements during the numerical computation. As proposed by Ronchi et al. (1996), the following auxiliary variables are introduced in order to simplify the expressions of differential operators:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \tan(\xi), \\ Y = \tan(\eta), \\ \delta = 1 + X^2 + Y^2, \\ C = \sqrt{1 + X^2}, \\ D = \sqrt{1 + Y^2}. \end{array} \right. \quad (5)$$

This surface is then mapped onto a rectangular grid, where the equations are solved using a standard finite volumes technique designed for regular meshes. The gridding technique can be illustrated by two sets of great circles spaced with a uniform angular increment ( $\Delta\xi$  and  $\Delta\eta$ ) with  $\xi$  and  $\eta$  varying between  $-\pi/4$  and  $\pi/4$ . The mesh is then extended radially between the two spherical surfaces bounding the shell ( $r_b$ ) and ( $r_t$ ), by concentric spheres with identical angular discretization, spaced by a radius increment  $\Delta r$  (see Fig. 2). Note that if the mesh associated to one of the blocks displays the same number of cells in the three directions, the azimuthal extent is usually larger than the radial dimension, assuming  $f$  is not too small ( $\pi/2(1-f)$  times on surface cells and  $\pi f/2(1-f)$  times on the cells adjacent to the inner boundary). This is often the configuration used in the present study's calculations since radial gradients play an important role in thermal convection.

[Figure 2 about here.]

The curved numerical domain is thus divided into non-uniform cells  $C_{ijk}$  ( $i, j, k$  corresponding to the indexes in the  $r$ -,  $\xi$ -,  $\eta$ -directions, respectively). The staggered grid mesh approach is adopted and the choice is made to use contravariant coordinates providing a better evaluation of fluxes for this configuration (see Choblet (2005) for further details). For technical reasons, we modified the coordinates orientation on blocks 2, 3 and 4. If there are  $N^i$  grid cells in a given direction, e.g. direction  $\xi$ , there are  $N^i + 1$  discrete values of the contravariant coordinate of the velocity field  $V^\xi$  between  $\xi = -\pi/4$  ( $V_{j=0}^\xi$ ) and  $\xi = \pi/4$  ( $V_{j=N^\xi+1}^\xi$ ). Thus,  $V_{j=0}^\xi$  on block 1 will be computed from the value  $V_{j=N^\xi+1}^\xi$  on block 0 (and also value  $V^\eta(\xi = \pi/4)$  on block 0, due to non orthogonality). In order to write strictly the same algorithm on each block, it is thus necessary that boundaries between blocks involve coordinates values of both  $-\pi/4$  and  $\pi/4$  (while, with the classical orientation proposed by Ronchi et al. (1996), coordinate  $\eta = \pi/4$  on block 1 coincides with coordinate  $\xi = \pi/4$  on block

4...). The new orientation satisfies this aspect. Relationships between this new coordinate system and the Cartesian and spherical basis are indicated in Table 2.

[Figure 3 about here.]

[Table 2 about here.]

### 3.2 Flow solver

In the cubed sphere coordinate system, eqs. (1) and (2) provide respectively the following projections:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \left( r^2 V^r \right)_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r D C^2} \left( \frac{V^\xi}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D^2} \left( \frac{V^\eta}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} = 0 \quad (6)$$

and, along  $r$ ,

$$p_{,r} = \frac{1}{r^3} \left( r^3 \tau^{rr} \right)_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r D C^2} \left( \frac{\tau^{r\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D^2} \left( \frac{\tau^{r\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} - RaT \quad (7)$$

along  $\xi$ ,

$$\frac{1}{r} \left( \frac{XY}{D} p_{,\eta} + D p_{,\xi} \right) = \frac{1}{r^3} \left( r^3 \tau^{\xi r} \right)_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r D C^2} \left( \frac{\tau^{\xi\xi}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\xi} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D} \left( \frac{\tau^{\xi\eta}}{D \delta^{1/2}} \right)_{,\eta} \quad (8)$$

along  $\eta$ ,

$$\frac{1}{r} \left( \frac{XY}{C} p_{,\xi} + C p_{,\eta} \right) = \frac{1}{r^3} \left( r^3 \tau^{\eta r} \right)_{,r} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D^2} \left( \frac{\tau^{\eta\eta}}{\delta^{1/2}} \right)_{,\eta} + \frac{\delta^{3/2}}{r C D} \left( \frac{\tau^{\eta\xi}}{C \delta^{1/2}} \right)_{,\xi} \quad (9)$$

where the components  $\tau^{\bullet\bullet}$  of the deviatoric part of the stress tensor ( $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ ) are

$$\tau^{rr} = 2\mu V_{,r}^r, \quad (10)$$

$$\tau^{r\xi} = \mu \left[ r \left( \frac{V^\xi}{r} \right)_{,r} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^r + \frac{XY}{r D} V_{,\eta}^r \right], \quad (11)$$

$$\tau^{r\eta} = \mu \left[ r \left( \frac{V^\eta}{r} \right)_{,r} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^r + \frac{XY}{r C} V_{,\xi}^r \right], \quad (12)$$

$$\tau^{\xi\xi} = 2\mu \left[ \frac{XY}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\xi}{D} \right)_{,\eta} + \frac{D}{r} V_{,\xi}^\xi + \frac{C^2 D^2}{r \delta} V^r - \frac{C Y D^2}{r \delta} V^\eta \right], \quad (13)$$

$$\tau^{\xi\eta} = \mu \left[ \frac{C D}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\eta}{C} \right)_{,\xi} + \frac{C D}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\xi}{D} \right)_{,\eta} - \frac{X Y C D}{\delta} V_{,r}^r \right], \quad (14)$$

$$\tau^{\eta\eta} = 2\mu \left[ \frac{X Y}{r \delta^{1/2}} \left( \frac{\delta^{1/2} V^\eta}{C} \right)_{,\xi} + \frac{C}{r} V_{,\eta}^\eta + \frac{C^2 D^2}{r \delta} V^r - \frac{D X C^2}{r \delta} V^\xi \right]. \quad (15)$$

Note that non-orthogonality between  $\xi$  and  $\eta$  leads to longer than usual expressions for the classical differential operators. The expressions of the discrete equations corresponding to eqs. (6)-(15) can be found in Choblet (2005).



The flow solver is decoupled from the treatment of the energy equation: the velocity field computed at time-step  $n$  is used for the advection of heat in the computation of temperature at time  $n + 1$ . The pressure and velocity fields are then updated simultaneously using the new temperature field to compute buoyancy and viscosity. We use a FAS-multigrid algorithm with V-cycles, a Gauss-Seidel smoother, linear transfer operators and coarse grid operators on all grids derived from the fine grid discretization (see Choblet (2005) for further details).

### 3.3 Advection-diffusion scheme

The equation describing conservation of energy is in the dimensionless form:

$$T_{,t} + T_{,r}V^r + \frac{\delta}{rDC^2}T_{,\xi}V^\xi + \frac{\delta}{rCD^2}T_{,\eta}V^\eta = \frac{1}{r^2} \left( r^2 T_{,r} \right)_{,r} + \frac{\delta}{r^2} \left[ \frac{T_{,\xi\xi}}{C^2} + \frac{T_{,\eta\eta}}{D^2} + \frac{2XYT_{,\xi\eta}}{C^2D^2} \right] + h. \quad (16)$$

A classical drawback of grid based methods used to solve the advection problem is that discrete schemes usually provide solutions that satisfy better a different partial differential equation than the simple advective transport equation (16): this modified equation includes diffusive (for first order schemes) or dispersive (second order schemes) terms. Moreover, in the context of non-orthogonal coordinate systems, the numerical diffusion is anisotropic: for the cubed-sphere coordinates, it is larger along  $\xi$  and  $\eta$  directions (e.g. Hernlund & Tackley, 2003). In order to solve these problems, we have tested three advection methods in the ‘cubed sphere’ context described in Appendix A: (i) the classical first order ‘upwind’ method produces large amounts of numerical diffusion and it is only used as a reference scheme, (ii) the ‘MPDATA’ method, used in several programs simulating thermal convection in a Cartesian context to study mantle dynamics (e.g. Tackley, 1994), (iii) the ‘van Leer’ method used more commonly in the context of compressible fluids (van Leer, 1979).

[Figure 4 about here.]

The test we propose is based on a solid rotation velocity field around the  $x$ -axis, i.e. proportional to

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{r} = \frac{r}{\delta} \begin{bmatrix} 0 \\ -YD \\ XC \end{bmatrix}. \quad (17)$$

We initially impose a sphere of radius 0.1 with an anomalous temperature 1 within a 0 temperature field in block 0 of the cubed sphere. It is then advected with the rotation velocity field so that if diffusion were negligible, the field should be invariant. We measure numerical diffusion through the volume of the region bounded by isotherm ( $T = 0.2$ ). Fig. 4 displays a comparison of the different

schemes using this criterion: increasing the number of correction steps ( $iord$ ) with ‘anti-diffusive’ velocities in the MPDATA scheme provides better results. Even with  $iord = 2$ , the volume of the hot sphere remains smaller on a mesh including  $32^3$  grid cells than the reference upwind scheme with a twice larger resolution ( $64^3$  grid cells). Tests of the van Leer methods, whatever slope is used, return even better results: the volume obtained with slope 2 (geometrical average, see Appendix A) after a similar time is twice smaller than the one obtained for  $iord = 3$ . Slope 1 (MC limiter, see Appendix A) leads to a volume that increases less (40 % smaller than the increase obtained for slope 2). Even though the treatment of the energy equation corresponds only to a small fraction of the global costs associated to the simulation of thermal convection with our method, the CPU cost of the various advection methods is displayed in Table 3. The van Leer methods are both twice more time-consuming than the simple upwind scheme. Increasing the number of corrective steps in MPDATA increases the computation time ( $iord = 4$  already costs twice as much as the van Leer methods). For all these reasons, we will use the quite simple and quite efficient van Leer method (with MC limiter slope 1) in the following computations.

[Table 3 about here.]

Further remarks on the numerical diffusion process are illustrated on Fig. 5. While the reference upwind scheme provides a strong flattening of the volume compared to the initial spherical shape, this feature is attenuated in the van Leer case. The main reason for this flattening is that the velocity field we employ for the test has a zero  $V^r$  component. It should thus be noted that this flattening does not reflect anisotropy in the numerical diffusion process. Anisotropy can be observed on the ‘azimuthal’ projections (right in Fig. 5) where a significant distortion exists for the upwind scheme while the projection of the volume remains circular in the van Leer case (coordinates  $\xi$  and  $\eta$  playing a role that should be strictly equivalent in this test).

[Figure 5 about here.]

#### 4 EVALUATION OF THE GEOID AND DYNAMIC TOPOGRAPHY

In this section, we give basic formulas relating the stresses due to thermal convection in planetary interiors with surface observables, namely the dynamic topography and the geoid. We will follow the approach described by Ricard et al., (1984) and Richards & Hager (1984). For the sake of clarity, we first present these equations using physical quantities (denoted with tildes) and then we rewrite them in dimensionless forms, consistent with descriptions considered in previous sections.

#### 4.1 Equations

The stresses arising from the viscous flow in the mantle deform the surface of the planet and the bottom boundary (sometimes referred to in this text as the core-mantle boundary, CMB, as is the case for the Earth and most terrestrial planets). The deviation  $\tilde{t}_s$  of the deformed surface from a spherical shape,

$$\tilde{t}_s(\theta, \phi) = \tilde{r}_s(\theta, \phi) - \tilde{r}_t \quad (18)$$

where  $\tilde{r}_s$  is the radius of the surface at a point with spherical coordinates  $\theta$  and  $\phi$ , and  $\tilde{r}_t$  is the mean radius of the planet, can be obtained from the equilibrium of radial forces evaluated on a sphere of radius  $\tilde{r}_t$ . In a first approximation, we can write

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t) = -\rho_0 g \tilde{t}_s(\theta, \phi) \quad (19)$$

where  $\tilde{\sigma}_{rr}$  is the radial component of the traction force at a spherical boundary of radius  $\tilde{r}_t$ ,

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) = -\tilde{p}^*(\tilde{r}_t, \theta, \phi) + 2\tilde{\mu}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) \left[ \frac{\partial \tilde{V}^r(\tilde{r}, \theta, \phi)}{\partial \tilde{r}} \right]_{\tilde{r}=\tilde{r}_t} \quad (20)$$

$\bar{\sigma}_{rr}$  is its average value,

$$\bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (21)$$

and  $g$  is the gravitational acceleration which is supposed here to be constant throughout the shell. The topography  $\tilde{t}_s$  induced by mantle flow is usually referred to as dynamic topography. In evaluating the forces due to topographic masses (the right-hand side of eq. (19)), we only considered the lithostatic pressure and neglected the effect of self-gravitation. Eq. (19) would have a more complex form if the viscous mantle is overlaid by an elastic or viscoelastic layer, as in (Zhong, 2002), or a membrane (e.g. Ribe, 1992). A similar equation of equilibrium for the surface can be written for the CMB. If we neglect the variations of pressure in the liquid core, associated with gravitational effects of density anomalies in the mantle and the surface and CMB topographic masses, we can express the topography  $\tilde{t}_c$  of the CMB as follows:

$$\tilde{t}_c(\theta, \phi) = \frac{\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b, \theta, \phi) - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b)}{\Delta \rho_c g} \quad (22)$$

where  $\Delta \rho_c$  is the density jump at the CMB.

The anomalies of gravitational potential  $\tilde{U}$  induced by thermal convection in the shell are a superposition of the gravitational signals from topographies  $\tilde{t}_s$  and  $\tilde{t}_c$ , and the gravitational signal induced by density anomalies in the shell. Using the integral expression for gravitational potential and eqs. (19) and (22), we obtain

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(\tilde{r}, \theta, \phi) &= -\frac{G\tilde{r}_t^2}{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_t)}{\tilde{d}(\tilde{r}_t, \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&+ \frac{G\tilde{r}_b^2}{g} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(\tilde{r}_b)}{\tilde{d}(\tilde{r}_b, \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&+ G \int_{\tilde{r}_b}^{\tilde{r}_t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta\tilde{\rho}(\tilde{r}', \theta', \phi')}{\tilde{d}(\tilde{r}', \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)} \tilde{r}'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' d\tilde{r}'
\end{aligned} \tag{23}$$

where  $G$  is the gravitational constant,  $\Delta\tilde{\rho}$  are the density anomalies in the mantle, and  $\tilde{d}(\tilde{r}', \theta', \phi' | \tilde{r}, \theta, \phi)$  is the distance between the points  $(\tilde{r}', \theta', \phi')$  and  $(\tilde{r}, \theta, \phi)$ . If potential  $\tilde{U}$  is known we can determine the height of the geoid from the Bruns theorem (e.g. Lambeck (1988)),

$$\tilde{N}(\theta, \phi) = \tilde{U}(\tilde{r}_t, \theta, \phi)/g \tag{24}$$

We will show in section 4.2 that the evaluation of integrals in eq. (23) can easily be done in a spectral domain.

Comparison of the predicted geoid and dynamic topography with the observed data requires the predicted quantities to be expressed in physical units. With the characteristic scales defined above, the radial traction and density fields used in the computation of geoid and topography are obtained from results of the thermal convection model with the following relationship:  $\tilde{\sigma}_{rr} = (\mu_0\kappa/d^2)\sigma_{rr}$ . In this context, the dimensionless dynamic topography is

$$t_s(\theta, \phi) = \frac{\tilde{t}_s}{d} = -\frac{E}{Ra}(\sigma_{rr}(r_t, \theta, \phi) - \bar{\sigma}_{rr}(r_t)) \tag{25}$$

where dimensionless number  $E = \alpha\Delta T$ , measuring thermal expansion, is introduced. The dimensionless version of eq. (23) is

$$\begin{aligned}
U(r, \theta, \phi) &= -\frac{r_t^2}{Ra} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma_{rr}(r_t, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(r_t)}{d(r_t, \theta', \phi' | r, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&+ \frac{r_b^2}{Ra} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma_{rr}(r_b, \theta', \phi') - \bar{\sigma}_{rr}(r_b)}{d(r_b, \theta', \phi' | r, \theta, \phi)} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&- \int_{r_b}^{r_t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{T(r', \theta', \phi')}{d(r', \theta', \phi' | r, \theta, \phi)} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'
\end{aligned} \tag{26}$$

The dimensionless height of the geoid is then

$$N(\theta, \phi) = \frac{\tilde{N}}{d} = G^* EU(r_t, \theta, \phi) \tag{27}$$

where  $G^* = G\rho_0 d/g$  is a gravitational dimensionless parameter. The scales introduced here are determined by the scaling of the internal dynamics problem (eqs. 1-3). Therefore, their values are not

really significant for the geoid and the dynamic topography: for example, length scale  $d$  (thickness of the convective shell) is significantly larger than the characteristic values of  $\tilde{N}$  or  $\tilde{t}_s \dots$

## 4.2 Spectral evaluation

The computation of the surface dynamic topography, eq. (19), requires the vertical component of the traction  $\sigma_{rr}$  at the upper boundary to be evaluated from a dimensionless version of eq. (20). This quantity is directly computed on the grid described in section (3.1). For many applications, however, the surface topography needs to be expressed in terms of a spherical harmonic series. In the present paper, for the sake of simplicity of notation, we use the complex spherical harmonic basis  $\{Y_{\ell m}\}$  which is orthonormal over the unit sphere:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{\ell_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{\ell_2 m_2}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (28)$$

where the asterisk denotes complex conjugation and  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta. The amplitude  $t_s$  of the dynamic topography at a point  $\{\theta, \phi\}$  can then be approximated as follows,

$$t_s(\theta, \phi) = \sum_{\ell=1}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (t_s)_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (29)$$

where  $\ell_{max}$  is the maximum degree considered and  $(t_s)_{\ell m}$  are the spherical harmonic coefficients of degree  $\ell$  and order  $m$ ,

$$(t_s)_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t_s(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (30)$$

(for more details, see Jones, 1985, or Varshalovich et al., 1988). If  $t_s$  is given at discrete points  $\{\theta_i, \phi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^g$ , the integral in eq. (30) can be replaced by a sum and the coefficients  $(t_s)_{\ell m}$  can be evaluated using the following simple formula:

$$(t_s)_{\ell m} = \sum_{i=1}^{N^g} t_s(\theta_i, \phi_i) Y_{\ell m}^*(\theta_i, \phi_i) \Delta s_i \quad (31)$$

where  $\Delta s_i$  is the surface area corresponding to the  $i$ -th point, normalized so that  $\sum_{i=1, N^g} \Delta s_i = 4\pi$ . Eq. (25) thus reduces to

$$(t_s)_{\ell m} = -\frac{E}{Ra} (\sigma_{rr}^s)_{\ell m} \quad (32)$$

Note that the summation in eq. (29) is done from degree 1 to  $\ell_{max}$ . The degree-zero term corresponds to the mean value of  $t_s$  over the sphere and is by definition equal to zero. The choice of the cut-off degree  $\ell_{max}$  in eq. (29) depends on the density of grid points. Since only the spherical harmonics whose half-wavelengths are greater than the size of the maximum grid step can be retrieved from the grid data,  $\ell_{max}$  must satisfy the condition

$$\ell_{max} < \frac{\pi \tilde{r}_t}{\max_i \{\lambda_i\}} \quad (33)$$

where  $\lambda_i$  is the grid step.

The calculation of the geoid, eq. (27), requires the evaluation of the volume and surface integrals in eq. (26) for gravitational potential. This integration is usually also carried out in spectral domain. First, we express all the quantities appearing in eq. (26) in terms of spherical harmonic expansions:

$$X(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=1}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} X_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (34)$$

where  $X$  stands for  $U$ ,  $T$  and  $\sigma_{rr} - \bar{\sigma}_{rr}$  evaluated on both interfaces ( $r = r_t$  and  $r = r_b$ ). The terms of degree zero are not included in summation as we assume that all quantities considered represent deviations from average values. Substituting eq. (34) into (26), using the addition theorem (e.g. Burša and Pěč, 1993), and invoking the orthonormality property (28), we obtain,

$$U_{\ell m}(r) = \frac{4\pi r}{2\ell + 1} \left[ -\frac{(\sigma_{rr}^s)_{\ell m}}{Ra} \left(\frac{r_t}{r}\right)^{\ell+2} + \frac{(\sigma_{rr}^c)_{\ell m}}{Ra} \left(\frac{r_b}{r}\right)^{\ell+2} - \int_{r_b}^{r_t} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell+2} T_{\ell m}(r') dr' \right] \quad (35)$$

where  $U_{\ell m}$  are the spherical harmonic coefficients of the external ( $r \geq r_t$ ) gravitational potential. The spherical harmonic coefficients of the geoid, eq. (24), are then simply

$$N_{\ell m} = G^* E U_{\ell m}(r_t) \quad (36)$$

## 5 TESTS AND BENCHMARK

### 5.1 Flow solver and response functions

The flow solver was tested successfully against analytical solutions for both an isoviscous fluid and a fluid with radius-dependent viscosity (Choblet, 2005). These tests are based on the differential rotations of the bounding spheres.

To further test the flow solver, we have computed response functions, i.e. the topography and geoid produced by a normalized density anomaly located at a varying depth (for details, see, e.g. Ricard et al. (1984) or Hager & Clayton (1989)) and compared our results with those obtained with a spectral method described by Čadek (1989). We thus solve only eqs. (1), (2), (32), (35) and (36): eq. (3) describing the conservation of energy is not considered. Boundary conditions are no-slip on top and free-slip on the bottom. We use the following values of the dimensionless parameters:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f & = 0.5 \\ Ra & = 1 \\ E & = 1 \\ G^* & = 0.5G \end{array} \right. \quad (37)$$

The dimensionless temperature field is

$$T = \begin{cases} Y_{\ell m}(\theta, \phi)/\Delta r & \text{if } r \in [r_b + (i - 1/2)\Delta r, r_b + (i + 1/2)\Delta r]_{1 \leq i \leq N^r} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (38)$$

Three viscosity functions have been considered. The first case is isoviscous, and two radius-dependent viscosities are tested (Fig. 6): profile 1 mimics the radial variations observed in a stagnant lid regime with a range of approximately four orders of magnitude while profile 2 is a simple step-like viscosity variation. Note that we do not introduce azimuthal gradients in the tested viscosity field because the spectral method we compare our results with, would lose its interest in this case.

We use both the grid-based flow solver described above (cf. 3.2, the grid mesh includes  $6*64*64*64$  cells corresponding to the discretization used in classical thermal convection calculations) and a solver based on a spectral method in order to produce the velocity and pressure fields that are then used to compute dimensionless values of the dynamic topography and geoid (eqs. 32, 36). For each couple  $(\ell, m)$ , dynamic topographies at the surface,  $t_s$ , and at the CMB,  $t_c$ , as well as the geoid  $N$  are evaluated as a function of the mean depth of the density anomaly. We then compute the spherical harmonic coefficients  $(t_s)_{\ell m}$ ,  $(t_c)_{\ell m}$ ,  $N_{\ell m}$  using the integrations indicated in section (4.2). Besides computing the spherical harmonic coefficients at the same degree as the load, we have also ensured that the coefficients of geoid and topographies at other degrees and orders effectively equal zero. We have also tested that the response function at degree  $\ell$  are identical for any  $m \leq \ell$ .

Figs. 7-9 display some results of these tests obtained for degrees 2, 5, 10, and 15. Concerning the absolute values of the response functions, the isoviscous case displays the classical result that increasing degree  $\ell$  results in a sensibility to shallower (for surface dynamic topography and geoid) or deeper (for bottom topography) structures and also in a smaller amplitude. It is also interesting to note that the effect of the strong and continuous viscosity increase, mimicking a stagnant lid but with only radial viscosity variations (profile 1, flat response function for low degrees between  $r = 1.8$  and  $r = 2$  for topography, cf. Fig. 8, especially for low degrees) is also observed for profile 2 (Fig. 9) where the viscosity jump across the ‘lid’ is much smaller and discontinuous (30). Finally, the results indicate how the response functions reflect the radial derivative of the viscosity profile (profile 1 is smooth, profile 2 is discontinuous).

Concerning the differences between the two methods (‘error’ variable in Figs. 7-9), the spectral method is considered to be the reference due to its better precision, ‘error’ thus mostly refer to the grid-based flow solver. In the isoviscous case (cf. Fig. 7), both results are in very good agreement. The maximum discrepancy is always observed for the largest degree (here  $\ell = 15$ ). For dynamic topographies, it is located near the two interfaces and reaches a value of 1%. These are responsible for the surface error on geoid (also 1 % of the peak value located at  $r \sim 1.9$ ). These errors are likely to

be caused by the discrete treatment of boundary conditions. In the case of profile 1 (Fig. 8), the shape of the error profiles is affected by the viscosity profile. This is also obvious in the case of step-like profile 2 (Fig. 9): the two discontinuities in the viscosity profile induce discrepancies between the two results above and below. This leads to 1-1.5 % errors even for lower degrees (e.g. for  $\ell = 5$  between  $r = 1.4$  and  $r = 1.6$ ). Finally, we consider that the very good agreement between these results proves that  $\mathcal{E}DIPUS$  provides reliable estimations of geoid and topography for planetary applications where degrees  $\ell \leq 15$  will be considered. It should be noted that for the present size of the grid mesh, the results deteriorate strongly when degrees  $\ell \geq 20$  are studied. Hence, a refinement of the grid mesh (at least in the azimuthal direction,  $6 \times 64 \times 128 \times 128$  cells) is needed to reduce the discrepancy to acceptable values (less than 5% for geoid). Equation (33) indicates that, in the case where each block of the cubed sphere is associated to a  $N^2$  mesh (with  $N = N^\xi = N^\eta$ ), degrees up to  $2N - 1$  could be considered ( $\ell_{max} = 127$  if  $N = 64$ , and only  $N = 11$  cells would be needed for  $\ell_{max} = 20 \dots$ ). This relationship clearly overestimates the maximum reliable degree for a given ‘grid size’ in the angular directions. Instead, our tests indicate that approximately eight times more grid cells are needed. An empirical rule would thus be that each block of the cubed sphere is divided in  $N = 4 \times \ell_{max}$  cells in each angular direction if spherical harmonics up to degree  $\ell_{max}$  are to be considered with confidence. A more rigorous approach, however, is that each time higher degrees of topography and geoid are computed, a short benchmark procedure on response functions up to this degree be made for the mesh.

[Figure 6 about here.]

[Figure 7 about here.]

[Figure 8 about here.]

[Figure 9 about here.]

## 5.2 Thermal convection

Benchmarks for thermal convection have already been produced in the earlier publication (Choblet, 2005) including tests on the onset of convection for spherical harmonics perturbations and tests on the value of the Nusselt number for stationary convection at relatively low Rayleigh numbers. However, since we now use a different numerical method to simulate advection that is proven to be more accurate (for example, it produces less numerical diffusion, cf. section 3.3), we present four results referenced in Table 4. Table 5 displays a new benchmark based on recent compilations (Yoshida & Kageyama, 2004; Stemmer et al., 2006): two cases (numbered 1 and 2) have been isolated among the list, one corresponding to a tetrahedral solution, one to a cubic one, these two steady planforms being identified



by linear stability analysis and obtained by several numerical models for relatively low values of the Rayleigh number.

[Table 4 about here.]

[Table 5 about here.]

We used a  $6*32*32*32$  cells grid mesh to perform both calculations. This mesh provides a satisfactory resolution for these cases with small Rayleigh numbers. Mechanical boundary conditions are stress-free on both spherical surfaces bounding the shell. The results show a good agreement with solutions obtained earlier with various numerical methods. A comforting observation is also the small difference between bottom and surfaces heat fluxes that indicates that the scheme is indeed globally conservative. The techniques used in the various programs compared here seems to have a small effect on global scalar values such as the Nusselt number. Part of the scattering might be attributable to the variations of the mesh resolution (a precise analysis is proposed by Stemmer et al. (2006)); the specific treatment of numerical diffusion proposed in the present study (cf. section 3.3) is not observable. Global averages are probably not a sufficient criterion for a very precise benchmark. In addition, the use of higher order accuracy schemes in time would also produce variations among the various programs if a time-dependent case were studied (our explicit method is only order 1 in time). A precise benchmark in the future should also include such a test.

[Figure 10 about here.]

We further propose two time-dependent results for thermal convection. One (Case 3) is obtained for an isoviscous fluid with purely basal heating, the other (Case 4) corresponds to a stagnant-lid regime and includes approximately 20 % volumetric heating. Both calculations were performed with no-slip radial boundaries and both have reached a statistical steady state on a  $6*64*64*64$  cells grid mesh. A typical duration for such a run is about a hundred hours on 48 (rather slow, 500 MHz) SGI processors R14000. Time-averaged profiles are presented in Fig. 10 (with therefore a relatively smooth aspect). A classical result is the asymmetry between the cold and hot boundary layers due to their different curvature. If both boundary layers had a similar thickness, the temperature difference across the hot one would be approximately  $1/(1 + f^2)$  and  $f^2/(1 + f^2)$  across the cold one. The temperature of the well-mixed interior is thus linked to the ratio between the areas of both surfaces (in the present case, this temperature is indeed close to  $1/5$ , cf. Fig. 10 and Table 6). Both the introduction of temperature-dependent viscosity and the addition of volumetric heating naturally increases this value (cf. Fig. 10). The minimum and maximum temperature profiles also indicate that in both cases, the average is closer to the minimum value than to the maximum. In Case 3, the whole layer participates to convective motion: the difference between the minimum temperature and the average value at a given

depth thus simply reflects the temperature difference across the cold boundary layer; the difference between the maximum and the average reflects the difference within the hot boundary layer. Since, for geometry reasons indicated above, the boundary layer temperature difference is ( $f^{-2}$ ) larger across the hot layer than across the cold one, the average radial profile is closer to the minimum profile. In Case 4, though the temperature difference across the cold boundary layer is larger than across the hot one, the effective cold sublayer that participates to convection is only a fraction of it (see Table 6). Assuming a simple force balance where the downwelling velocity is mostly due to the buoyancy of the unstable part of the cold boundary layer and the upwelling velocity to the buoyancy of the hot boundary layer, we expect that in both cases, the downwelling velocity is smaller than the upwelling velocity: this is what is observed. The asymmetry is even more pronounced when temperature-dependence of viscosity is included. This reflects the fact that, in a spherical shell, viscosity variations may be significant in the hot boundary layer while they are smaller than one order of magnitude in the Cartesian case. In addition, in the stagnant lid case, radial velocities vanish at the bottom of the lid.

[Table 6 about here.]

Concerning radial heat fluxes, though the classical feature of two radii close to the bottom and top of the domain delimiting zones where radial diffusion exceeds radial advection (hot and cold boundary layers) from a zone where the contrary is true (well mixed convecting core), it is interesting to note that the conservation of the power from one radius to the other implies that the sum of the advective and convective part of the radial flux diminishes as the spherical area increases (i.e. as the square of the radius) when no volumetric heating is taken into account (explaining the parabolic shape of the advective profile, Fig. 10). When a constant volumetric heating rate is introduced, the global power is proportional to  $P(r) = r^2(q_{adv}(r) + q_{di}(r)) - (r^3 - r_b^3)h/3$ . The conservation of this quantity throughout the spherical shell gives a significant amount of information on the state of the flow in terms of distance from steady-state and possible resolution problems. In both Cases presented in Figure 10, a statistical steady state is clearly reached ( $P(r)$  is nearly independant of  $r$ ). However, a departure from the nominal value can be observed at depths corresponding to the unstable boundary layers: this is more obvious for Case 4, especially for the hot bottom boundary layer (the deviation is larger than 20 %). This feature could be related to time period for the averaging that is too small. Here, it indicates that the convective regime would imply a more accurate grid mesh. It is interesting to note that though the temperature difference across the hot boundary layer is smaller for Case 4 than for Case 3, the resolution limit does not seem to be reached for Case 3. This is probably due to the fact that the gradient is about 20% larger in Case 4 (see the bottom Nusselt number values in Table 6).

### 5.3 Coupled computation: internal dynamics, topography and geoid

Dynamic topography and geoid have been computed for the four thermal convection results presented above (Table 4). We have used the following values for the dimensionless parameters:  $E = 5 \times 10^{-2}$  and  $G^* = 2 \times 10^{-2}$ . It should be noted that this choice, while it is based on plausible orders of magnitude for a generic planetary mantle (cf. Table 7), remains nevertheless rather arbitrary. Note that both the amplitude of the presented geoid and the relative influence of (i) topographies at the interfaces and (ii) density anomalies throughout the spherical shell, are affected by this choice. Finally, it should be noted that since the dimensionless value of geoid  $N$  implies the use of dimensionless parameter  $G^*$ , an alternative variable may be the dimensionless potential at the surface of the shell  $U(r_t)$  that does not require the introduction of further dimensionless quantities. Indeed,  $N$  is simply proportional to  $U(r_t)$ . However, if dynamic topographies are to be computed from numerical simulations of thermal convection,  $E$  needs to be introduced.

Figs. 11-14 display the results of the computation for Cases 1 to 4, respectively. According to section 4.2, the data needed to produce these maps are the radial stress  $\sigma_{rr}$  on the interfaces and the three-dimensional temperature field  $T$ . These gridded data sets (with variable areas) are first transposed into the spherical harmonics basis (coefficients are computed to a maximum degree  $\ell_{max}$  of 30). Dimensionless topography and geoid are then computed according to the procedure described in 4.2 and finally plotted on a latitude-longitude grid. Thus, degrees shorter than  $\ell_{max} = 30$  do not appear on topography and geoid fields in Figs. 11-14.

A first result is that both the tetrahedral and cubic Cases 1 and 2 (Figs. 11 and 12, respectively) lead to topography and geoid variations that still exhibit, among others, the strong spherical harmonic coefficients inherited from the initial perturbation:  $(\ell = 3, m = 2)$  for tetrahedral Case 1,  $(\ell = 4, m = 0)$  and  $(\ell = 4, m = 4)$  for cubic Case 2. The amplitudes are rather large (on the order of a few percents of the planet's radius for surface dynamic topography) and indicate that these cases are probably not relevant for a comparison in the planetary context.

[Figure 11 about here.]

[Figure 12 about here.]

Time-dependent Cases 3 and 4 lead to shorter wavelengths variations of both surface dynamic topography and geoid. Again, these features directly reflect the wavelength observed for thermal convection in the spherical shell: the power spectrum associated to the results in Case 3 peaks for degree  $(\ell = 8)$  while the maximum is obtained for higher degrees in Case 4 ( $\ell = 12$  and larger, the uncertainty associated to degrees higher than 15 in the spectral evaluation of geoid and topography being non-negligible). This result is mostly induced by value of the internal Rayleigh number  $Ra_i$  (i.e. ob-

tained for a viscosity value characteristic of the convective sublayer):  $Ra_i = Ra = 1.4 \times 10^6$  for isoviscous Case 3 while  $Ra_i \sim 8 \times 10^7$  for Case 4. The major effect of the viscous conductive lid in Case 4, compared to the isoviscous Case 3, is the increase of the amplitude of the topography while the geoid has the same order of magnitude in both cases. It is important to note that, as demonstrated by Solomatov (2004), an Arrhenius-type viscosity law would provide a larger deviatoric stress field near the surface of the stagnant lid. Its influence on dynamic topography is probably only weak since topography is mainly maintained by variations in pressure, which mostly reflects the density distribution. The effect on geoid might be worth examining.

[Figure 13 about here.]

[Figure 14 about here.]

## 6 CONCLUSION

The variations of geoid and surface dynamic topography contain important information about internal dynamic processes occurring within silicate mantles of terrestrial planets or surface icy layers of the large satellites of giant planets. Though, ultimately, a precise estimate of the internal structure will also require ground-based geophysical experiments (see, for example Verhoeven et al., 2005), observations such as the geoid and topography can be obtained from experiments in an orbiter mission.

In the present study, we propose a dimensionless framework for this coupled problem: internal dynamics and the resulting geoid and dynamic topography. The characteristic scales are inherited from infinite Prandtl number thermal convection, with the four dimensionless parameters  $Ra, f, \gamma, h$ . Two additional dimensionless parameters are introduced in order to produce dimensionless values for geoid and topography:  $E$  and  $G^*$  (Table 7 indicates plausible ranges for this two terms, much smaller than the one associated to the Rayleigh number). As well as the velocity scale based on thermal diffusion  $\kappa/d$  is not significant for velocities associated to natural thermal convection, the length scale based on the shell thickness is much larger than realistic values for  $N, t_s$ . Finally, a good alternative to dimensionless geoid may be the surface value of the dimensionless gravitational potential,  $U(r_t)$ .

[Table 7 about here.]

In order to model internal dynamics, we propose an efficient numerical method based on the ‘cubed-sphere’ grid mesh where the spherical shell is decomposed on six non-conformal blocks. We present a high-resolution scheme (with a slope-limiter non-linear method) to treat the advection term in the energy equation as well as a benchmark of various schemes. The flow solver is already described for one of the blocks in (Choblet, 2005). It is tested extensively against a very precise spectral

method for flows with a radial-dependence of viscosity. The response functions for geoid and dynamic topographies indicate a very good agreement up to degree  $\ell = 15$  for a  $64 \times 64 \times 64$  grid mesh in the flow solver (a correct description of higher degrees requires finer meshes). We believe that such an agreement is needed to apply thermal convection results to the computation of geoid and topography for planetary applications. Since various new methods for thermal convection in a spherical shell now exist, a precise benchmark should include such a calculation of geoid and topography.

However, the physical model proposed here is still oversimplified. For example, the adjunction of an increase of viscosity with depth (due to pressure dependence and/or to a viscous stratification within the mantle) has been shown to reduce significantly the characteristic degree of spherical convection (Bunge et al., 1997; Yoshida & Kageyama, 2006; Roberts & Zhong, 2006). Similarly, compositional effects on density and viscosity would lead to different structures and thus different results for geoid and topography. More, the rheological description of the stagnant lid is clearly the weakest point of many numerical codes used to model the flow in planetary interiors and ÆDIPUS is not an exception. The effect of a more realistic Arrhenius type viscosity law has already been discussed. The simple introduction of an elasticity component (as in Zhong (2002), for example) would also modify significantly the results: in our viscous models, a surface dynamic topography is obtained even for a very viscous lid while an elastic behavior would largely reduce the viscous component. Indeed, the observed geoid and topography are superpositions of various contributions among which the dynamic one may be the least important (e.g. Le Stunff & Ricard, 1995). A large portion of the topographic load may be maintained by isostasy and/or elastic flexure, depending on the wavelength of the topographic features, the thickness of the lithosphere and the radius of the body (e.g. Turcotte et al., 1981; Pauer et al., 2006). A careful analysis of the data is thus necessary for a correct interpretation of the geoid and topography in terms of viscous flow models.

For these reasons, a direct comparison of the topography and geoid obtained from a convection simulation with planetary observables is likely to be misleading in many cases. An intermediate approach may include the computation of dimensionless geoid and topography for a large range of model parameters and for various physical models of the internal dynamics. Next steps can then be the a posteriori correction of the predicted geoids and topographies for lithospheric effects (e.g. by including an elastic layer on the top or considering a membrane correction for a stiff uppermost layer) and their comparison with observed data, at least partly reduced to isostatic effects or at wavelengths where the dynamic contribution is presumably dominant.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank S. Zhong and an anonymous reviewer for their comments. The work benefited from Charles University grant GAUK 280/2006/B-GEO/MFF in the Czech Republic and from the Programme National de Planétologie in France.

## REFERENCES

- Baumgardner, J., 1985. Three-dimensional treatment of convective flow in the earth's mantle, *J. Stat. Phys.*, **39**, 501–511.
- Bercovici, D., 2003. The generation of plate tectonics from mantle convection, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **205**, 107–121.
- Bercovici, D., Schubert, G., & Glatzmaier, G. A., 1989. Three-dimensional spherical models of convection in the Earth's mantle, *Science*, **244**, 950–955.
- Bunge, H.-P., Richards, M. A., & Baumgardner, J. R., 1997. A sensitivity study of three-dimensional spherical mantle convection at  $10^8$  Rayleigh number: Effects of depth-dependent viscosity, heating mode, and an endothermic phase change, *J. Geophys. Res.*, **102**, 11991–12008.
- Burša, M. & Pěč, K., 1993. *Gravity Field and Dynamics of the Earth*, Springer-Verlag.
- Čadek, O., 1989. Spherical tensor approach to the solution of the mantle stress problem, *Studia Geoph. Geod.*, **33**, 117–197.
- Čadek, O. & Fleitout, L., 2003. Effect of lateral viscosity variations in the top 300 km on the geoid and dynamic topography, *Geophys. J. Int.*, **152**, 566–580.
- Choblet, G., 2005. Modelling thermal convection with large viscosity gradients in one block of the cubed sphere, *J. Comput. Phys.*, **205**, 269–291.
- Choblet, G. & Parmentier, E. M., 2001. Mantle upwelling and melting beneath slow spreading centers: effects of realistic rheology and melt productivity, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **184**, 589–604.
- Davaille, A. & Jaupart, C., 1993. Transient high-Rayleigh-number thermal convection with large viscosity variations, *J. Fluid Mech.*, **253**, 141–166.
- Deschamps, F. & Trampert, J., 2004. Towards a lower mantle reference temperature and composition, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **222**, 161–175.
- Frank-Kamenetskii, D., 1969. *Diffusion and heat transfer in chemical kinetics.*, Plenum Press, New York.
- Glatzmaier, G., 1988. Numerical simulations of mantle convection: time-dependent, three-dimensional, compressible, spherical shell, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **43**, 223–264.
- Godunov, S., 1959. A finite difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics, *Mat. Sb.*, **47**, 271–306.
- Hager, B. H. & Clayton, R. W., 1989. Constraints on the structure of mantle convection using seismic observations, flow models, and the geoid., in *Mantle Convection: Plate Tectonics and Global Dynamics*, edited by W. R. Peltier, vol. 78, pp. 675–763, Gordon and Breach, New York.

- Harder, H. & Christensen, U. R., 1996. A one-plume model of martian mantle convection, *Nature*, **380**, 507–509.
- Harder, H. & Hansen, U., 2005. A finite-volume solution method for thermal convection and dynamo problems in spherical shells, *Geophys. J. Int.*, **161**, 522–532.
- Hernlund, J. W. & Tackley, P. J., 2003. Three-dimensional spherical shell convection at infinite prandtl number using the ‘cubed sphere’ method., in *Computational Fluid and Solid Mechanics*, edited by K. Bathe, p. 931, Elsevier.
- Hess, P. C. & Parmentier, E. M., 2005. A model for the thermal and chemical evolution of the Moon’s interior: implications for the onset of mare volcanism, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **134**, 501–514.
- Hsui, A., Yang, W., & Baumgardner, J., 1995. A preliminary study of the effects of some flow parameters in the generation of poloidal and toroidal energies within a 3D spherical thermal convection system with variable viscosity, *Pure Appl. Geophys.*, **145**, 487–503.
- Ishii, M. & Tromp, J., 2004. Constraining large-scale mantle heterogeneity using mantle and inner-core sensitive normal modes, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **146**, 113–124.
- Jones, N., 1985. *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*, Research Studies Press Ltd., Letchworth, England.
- Kageyama, A. & Sato, T., 2004. Yin-yang grid: An overset grid in spherical geometry, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **5**, Q09005, doi:10.1029/2004GC000734.
- King, S., 1995. Models of mantle viscosity, in *Mineral physics & crystallography, a handbook of physical constants*, edited by T. Ahrens, pp. 227–236, AGU, Washington, D.C.
- Lambeck, K., 1988. *Physical Geodesy*, Clarendon Press, Oxford.
- Le Stunff, Y. & Ricard, Y., 1995. Topography and geoid due to lithospheric mass anomalies, *Geophys. J. Int.*, **122**, 982–990.
- McNamara, A. K. & Zhong, S., 2004. Thermochemical structures within a spherical mantle: Superplumes or piles?, *J. Geophys. Res.*, **109**, 7402–+.
- Moresi, L. & Gurnis, M., 1996. Constraints on the lateral strength of slabs from three-dimensionnal dynamic flow models, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **138**, 15–28.
- Pauer, M., Fleming, K., & Čadež, O., 2006. Modeling the dynamic component of the geoid and topography of Venus, *J. Geophys. Res.*, p. in press.
- Ratcliff, J. T., Schubert, G., & Zebib, A., 1996. Steady tetrahedral and cubic patterns of spherical shell convection with temperature-dependent viscosity, *J. Geophys. Res.*, **101**, 25473–25484.
- Reese, C. C., Solomatov, V. S., & Moresi, L. N., 1999. Non-Newtonian stagnant lid convection and magmatic resurfacing on Venus, *Icarus*, **139**, 67–80.
- Ribe, N. M., 1992. The dynamics of thin shells with variable viscosity and the origin of toroidal flow in the mantle, *Geophys. J. Int.*, **110**, 537–552.
- Ricard, Y., Fleitout, L., & Froidevaux, C., 1984. Geoid heights and lithospheric stresses for a dynamic Earth, *Ann. Geophys.*, **2**, 267–285.



- Richards, M. A. & Hager, B. H., 1984. Geoid anomalies in a dynamic Earth, *J. Geophys. Res.*, **89**, 5987–6002.
- Roberts, J. H. & Zhong, S., 2006. Degree-1 convection in the Martian mantle and the origin of the hemispheric dichotomy, *J. Geophys. Res.*, **111**, 6013–+.
- Ronchi, C., Iacono, R., & Paolucci, P. . S., 1996. The “cubed sphere”: a new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry, *J. Comput. Phys.*, **124**, 93–114.
- Schubert, G., Turcotte, D. L., & Olson, P., 2001. *Mantle convection in the Earth and planets.*, Cambridge University Press.
- Smolarkiewicz, P., 1984. A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion, *J. Comput. Phys.*, **54**, 325–362.
- Solomatov, V. S., 2004. Initiation of subduction by small-scale convection, *J. Geophys. Res.*, **109**, 1412–+.
- Stemmer, K., Harder, H., & Hansen, U., 2006. A new method to simulate convection with strongly temperature- and pressure-dependent viscosity in a spherical shell: Application to the Earth’s mantle, *Phys. Earth Planet. Inter.*, p. in press.
- Tackley, P., 1994. *Three-dimensional models of mantle convection: influence of phase transitions and temperature-dependent viscosity*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena.
- Tackley, P. J., 2000. Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent, three-dimensional mantle convection simulations 1. Pseudo-plastic yielding, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **1**, doi:10.1029/2000GC000036.
- Tackley, P. J., 2000. Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent, three-dimensional mantle convection simulations 2. strain-weakening and asthenosphere, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **1**, doi:10.1029/2000GC000043.
- Tackley, P. J. & King, S. D., 2003. Testing the tracer ratio method for modeling active compositional fields in mantle convection simulations, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **4**, doi:10.1029/2001GC000214.
- Tobie, G., Lunine, J. I., & Sotin, C., 2006. Episodic outgassing as the origin of atmospheric methane on Titan, *Nature*, **440**, 61–64.
- Turcotte, D. L., Willemann, R. J., Haxby, W. F., & Norberry, J., 1981. Role of membrane stresses in the support of planetary topography, *J. Geophys. Res.*, **86**, 3951–3959.
- van Gerven, L., Deschamps, F., & van der Hilst, R. D., 2004. Geophysical evidence for chemical variations in the Australian Continental Mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, 17607–+.
- van Leer, B., 1979. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov’s method, *J. Comput. Phys.*, **32**, 101.
- Varshalovich, D., Moskalev, A., & Khersonskii, V., 1988. *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific.
- Verhoeven, O., Rivoldini, A., Vacher, P., Mocquet, A., Choblet, G., Menvielle, M., Dehant, V., Van Hoolst, T., Sleewaegen, J., Barriot, J.-P., & Lognonné, P., 2005. Interior structure of terrestrial planets: Modeling Mars’ mantle and its electromagnetic, geodetic, and seismic properties, *J. Geophys. Res.*, **110**, 4009–+.
- Yoshida, M. & Kageyama, A., 2004. Application of the yin-yang grid to a thermal convection of a boussinesq



- fluid with infinite prandtl number in a three-dimensional spherical shell, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, L12609.
- Yoshida, M. & Kageyama, A., 2006. Low-degree mantle convection with strongly temperature- and depth-dependent viscosity in a three-dimensional spherical shell, *J. Geophys. Res.*, **111**, 3412–+.
- Zhang, S. & Yuen, D. A., 1995. The influences of lower mantle viscosity stratification on 3D spherical-shell mantle convection, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **132**, 157–166.
- Zhong, S., 2002. Effects of lithosphere on the long-wavelength gravity anomalies and their implications for the formation of the Tharsis rise on Mars, *J. Geophys. Res.*, **107**, 8–1.
- Zhong, S., Zuber, M. T., Moresi, L., & Gurnis, M., 2000. Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection, *J. Geophys. Res.*, **105**, 11063–11082.

## APPENDIX A: DESCRIPTION OF THE ADVECTION SCHEMES

The motivation to introduce high resolution methods arise from the problem stated in “Godunov’s theorem”: *There are no monotone, linear schemes for the linear advection equation of second or higher order of accuracy.* When only linear schemes are considered, one is forced to choose between first order schemes that produce numerical diffusion or second order schemes that are not monotonic (i.e. produce spurious, non-physical oscillations). High resolution methods thus introduce a non-linear treatment of the advective flux term.

Neglecting for the moment the diffusive terms of right-hand side, the advective part of eq. (16) can be written as follows

$$T_{,t} + \frac{1}{J} \left[ (JT\bar{V}^r)_{,r} + (JT\bar{V}^\xi)_{,\xi} + (JT\bar{V}^\eta)_{,\eta} \right] = T_{,t} + \bar{V}^r T_{,r} + \bar{V}^\xi T_{,\xi} + \bar{V}^\eta T_{,\eta} = 0 \quad (\text{A1})$$

where  $J = \frac{r^2 C^2 D^2}{\delta^{3/2}}$  is the Jacobian of the coordinate transformation from the Cartesian basis to the natural basis associated to the cubed sphere coordinates and contravariant velocity components  $\bar{V}^\bullet$  refer to this natural basis (while  $V^\bullet$  refer to the physical basis, see Choblet (2005) for further details). Integrating eq. (A1) over the volume  $\mathcal{V}$  of cell  $C$  and during time step  $\Delta t$ , one obtains the conservation form

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \left( T^{n+1} - T^n \right) + \frac{1}{J\mathcal{V}} \left( F^r(r^+) - F^r(r^-) + F^\xi(\xi^+) - F^\xi(\xi^-) + F^\eta(\eta^+) - F^\eta(\eta^-) \right) = 0 \quad (\text{A2})$$

with

$$T^n = T(r, \xi, \eta, t^n) = \int_C T(r', \xi', \eta', t^n) dV, \quad (\text{A3})$$

and

$$F^I(r, \xi, \eta, t) = \int_t^{t+\Delta t} \int_{S^I} J(r', \xi', \eta', t') \bar{V}^I(r', \xi', \eta', t') T(r', \xi', \eta', t') dS^I dt, \quad (\text{A4})$$

where index  $I$  refer to the direction ( $r$ ,  $\xi$  or  $\eta$ ) so that  $S^I$  is the surface of the cell  $C$  corresponding to  $I = \text{constant}$  (unless explicitly written, the coordinates are  $r, \xi, \eta, t$ ).

Let us now consider the discrete problem. The staggered grid mesh approach is used so that velocities  $\bar{V}^I$  are localized on cell boundaries (corresponding to  $r_i^-, r_i^+, \xi_j^-, \xi_j^+, \eta_k^-, \eta_k^+$ ) and scalar quantities in the center (corresponding to  $r_i, \xi_j, \eta_k$ ) (see Choblet (2005) for further details). The Godunov approach (Godunov, 1959) then consists in the introduction of a function constant in the volume of cell  $C$  but varying through time:  $\Upsilon_{ijk}^n(t)$ . We thus obtain for the discrete flux on the cell boundaries

$$F^I = S^I J \bar{V}^I \int_t^{t+\Delta t} \Upsilon(t') dt \quad (\text{A5})$$

(here, and in the following lines, unless explicitly written, the indexes are  $i, j, k, n$ ). The first order accurate *upwind* scheme corresponds then to the choice of a constant value for  $\Upsilon$  corresponding either to the ‘left’ or the ‘right’ value  $T$ , depending on the sign of  $\bar{V}^I$ , e.g.,

$$F^{r-} = \begin{cases} \Delta l^\xi \Delta l^\eta \Delta t J \bar{V}^r T & \text{if } \bar{V}^r > 0, \\ \Delta l^\xi \Delta l^\eta \Delta t J \bar{V}^r T_{i-1} & \text{if } \bar{V}^r < 0. \end{cases} \quad (\text{A6})$$

with  $\Delta l^\xi, \Delta l^\eta$  the dimensions of the cell. A better (second order) precision can be obtained by adopting a (tri)linear function for  $\Upsilon$ , introducing slopes  $\sigma^r, \sigma^\xi, \sigma^\eta$ , constant in the time interval  $[t, t + \Delta t]$

$$\Upsilon(r, \xi, \eta, t) = T_{ijk}^n + \sigma_i^r(r - r_i) + \sigma_j^\xi(\xi - \xi_j) + \sigma_k^\eta(\eta - \eta_k). \quad (\text{A7})$$

Note that the case  $\sigma^\bullet = 0$  provides again the Godunov-upwind method from a different point of view. Classical choices for the slope including a centered (e.g.,  $\sigma^r = (T_{i+1} - T_{i-1})/2\Delta r$ , Fromm), upwind (e.g.,  $\sigma^r = (T_i - T_{i-1})/\Delta r$ , Beam-Warming) or downwind (e.g.,  $\sigma^r = (T_{i+1} - T_i)/\Delta r$ , Lax-Wendroff) however may induce oscillations in regions of large  $T$  gradients: in this context, a way to avoid these oscillations is to limit the slope’s values (slope- or flux-limiter methods) thus inducing the non-linear aspect of the method. Van Leer’s solution (van Leer, 1979) is then to consider the monotonized central-difference limiter (or MC-limiter) defined as follows, for example in the  $r$ -direction:

$$\sigma^r = \minmod \left( \left( \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r} \right), \left( 2 \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} \right), \left( 2 \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r} \right) \right). \quad (\text{A8})$$

with the *minmod* function:

$$\minmod(a, b, c) = \begin{cases} \text{sign}(a) \min(a, b, c) & \text{if } a \leq b \leq c \text{ or } a \geq b \geq c, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{A9})$$

This slope is termed slope 1 in our comparative study. In smooth regions, this reduces to the centered (Fromm) slope and gives a reasonably sharp resolution in large gradients regions by comparing it with twice the one-sided slopes. This is the reason why the use of non-linear limiters does not only make sense in the context of compressible flows where it was first introduced but also for incompressible flows where large gradients occur. Another solution is to compute the slope as a geometrical average:

$$\sigma^r = \begin{cases} \frac{2(T_{i+1}-T_i)(T_i-T_{i-1})}{(T_{i+1}-T_{i-1})\Delta r} & \text{if } T_{i-1} \leq T_i \leq T_{i+1} \text{ or } T_{i-1} \geq T_i \geq T_{i+1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{A10})$$

The *MPDATA* scheme (or Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm) corrects the classical upwind procedure by reapplying it with an anti-diffusive velocity field. The latter is derived from the truncation error analysis of the upwind scheme assuming a uniform flow. It is clear that this procedure can then be reapplied so that a good precision can be reached, iteratively (for a detailed description, see Smolarkiewicz, 1984 ). This method has been used successfully to model mantle dynamics in the Cartesian context. However, the corrective steps are quite time-consuming in the cubed-sphere coordinate system. Since a rigorous truncation error analysis in a multi-dimensional complex flow context is not possible, we do not study the precise effect of both high-resolution methods introduced here ( van Leer slope limiter, *MPDATA*) on the physics of the flow in terms of oscillations. The single effect on numerical diffusion is treated for a simple solid rotation flow.

## APPENDIX B: COMMUNICATION BETWEEN BLOCKS

Within each of the six blocks, **in the framework of parallel computation**, communication between processors is identical to a classical domain decomposition in a Cartesian parallelepipedic volume and (cf. Choblet, 2005). The main object here is thus to describe communication between the six blocks. As can be seen on Fig. 3, the 'new' orientation of the coordinate system induces only two configurations: either the coordinates 'match' on two adjacent blocks (one of the coordinate is the same modulo  $\pi/2$ , e.g.  $\xi$  for blocks 0 and 1 or  $\eta$  for blocks 1 and 4) or they are inverted ( $\xi$  becomes  $\eta$ , e.g. from 1 to 2, or vice versa, e.g. from 3 to 0).

Three kinds of variables may then be considered, due to the discretization:

- i) scalar variables and velocity component  $V^r$ , though they are 'located' at different depths in the staggered grid mesh approach, are however similar in terms of angular coordinates  $\xi$  and  $\eta$ . The buffer planes outside the block, at  $-\pi/4 - \Delta/2$  and  $\pi/4 + \Delta/2$ , are filled using the values from inside the adjacent blocks (e.g. located respectively at  $-\pi/4 + \Delta/2$  and  $\pi/4 - \Delta/2$  in the case of a *simple* configuration), a simple 1D interpolation being necessary since only one of the coordinates is different between the two blocks (e.g.  $\eta_0$  and  $\eta_1$  are different).
- ii) when dealing with *azimuthal* vector components, a 2D transformation is needed due to non-orthogonality: if we consider the example of blocks 0 and 1, corresponding to a *simple* configuration,

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1^\xi = \frac{\sqrt{1 + \frac{Y_0^2}{X_0^2}}}{D_0} V_0^\xi, \\ V_1^\eta = V_0^\eta - \frac{C_0 Y_0}{D_0 X_0} V_0^\xi \end{array} \right. \quad (\text{B1})$$

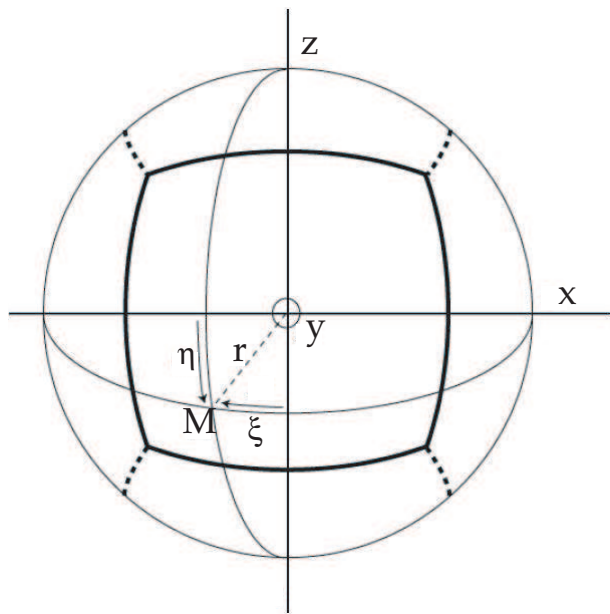
(these relations are similar in the case of an *inverse* configuration): in the case of normal velocity component (here  $V^\xi$ ), the discrete buffer planes located at  $-\pi/4 - \Delta$  and  $\pi/4$  are filled so that only the discrete values between  $-\pi/4$  and  $\pi/4 - \Delta$  are computed; again a simple 1D interpolation is performed, with an additional scaling factor corresponding to coefficient  $\sqrt{1 + (Y_0^2)/(X_0^2)}/D_0$  in eq. (B1).

iii) in the case of a velocity component that is tangent to the boundary ( $V^\eta$  for the boundary between 0 and 1), as in the scalar case, the buffer planes outside the block, at  $-\pi/4 - \Delta/2$  and  $\pi/4 + \Delta/2$ , are filled using the values of the corresponding tangent velocity from within the adjacent blocks (at  $-\pi/4 + \Delta/2$  and  $\pi/4 - \Delta/2$ ) and of the normal velocity at  $-\pi/4$  and  $\pi/4 - \Delta$ .

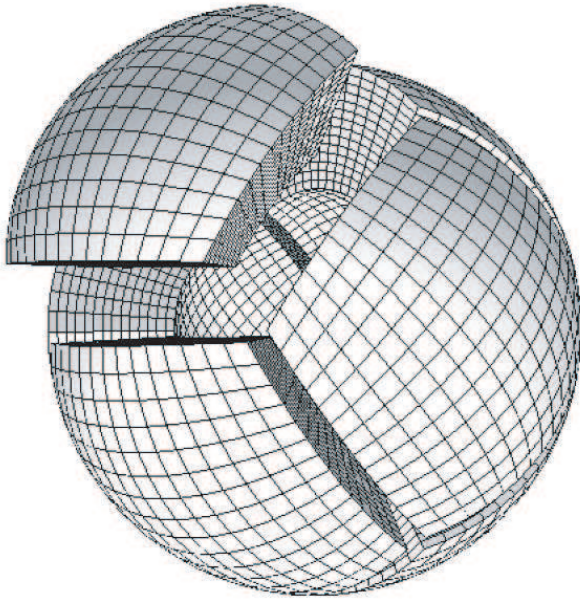
It should be noted that in spite of non-orthogonality, these interpolation and transformation procedures are very simple compared to the one induced by most multi-blocks algorithms.

## LIST OF FIGURES

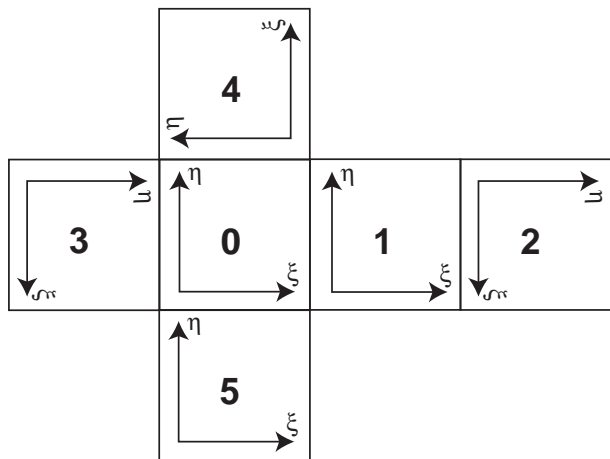
- 1 The sphere decomposed into six blocks and the curvilinear coordinate system on block 0. The main difference with spherical coordinates is that curves of constant values of the second coordinate  $\eta$  are great circles (or “horizontal meridians”) and not parallels.
- 2 The grid mesh as six “cubic” blocks. The azimuthal dimension of cells varies linearly with the radius.
- 3 Structure of the modified ‘cubed sphere’ coordinate system on other blocks: the original orientation of the curvilinear coordinates is modified due to the array structure of velocity fields in a staggered grid mesh approach (see text for further details).
- 4 Comparison of the different advection schemes: normalized volume delimited by the 0.2 isotherm as a function of time. Regular lines refer to a  $32^3$  grid mesh for block 0, bold lines refer to a  $64^3$  grid mesh. The lines without symbols are associated to the reference upwind scheme. Squares refer to the MPDATA scheme with increasing values of the number of ‘anti-diffusive’ steps associated to the shade:  $iord = 2$  (black),  $iord = 3$  (grey),  $iord = 4$  (white). Circles refer to the van-Leer method with either slope 1 (white circles) or slope 2 (black circles), see Appendix A for further details on the slopes. Time 0.314 approximately corresponds to ten rotation cycles for the velocity field we chose.
- 5 Volume of the  $T = 0.2$  isotherm after one full rotation on a  $64^3$  grid mesh. Upper panel: results for the upwind difference scheme. Lower panel: results for the van Leer method with slope 2.
- 6 Viscosity profiles used for the ‘response function’ benchmark of the flow solver: the solid line curve is test profile 1 - the dotted step-like curve is test profile 2.
- 7 Response functions obtained by the spectral method (solid line) and by the ÆDIPUS solver (open circles) and the associated error. On the left panel, dimensionless geoid, on the right panel, dimensionless dynamic topographies (blue: ‘CMB’ topography, red: surface topography). The dashed line with the same color indicates the ‘error’ (i.e. the absolute difference between two values at a given radius). Note that the scale for this difference is 100 times larger than the one corresponding to the related variable in order to represent values of about a percent of the maximum value. Four spherical harmonic degrees are presented:  $l = 2, 5, 10, 15$ . In this first case, the material is isoviscous.
- 8 Same than Fig. 7 for curved viscosity profile 1 (cf. Fig. 6).
- 9 Same than Fig. 7 for step-like viscosity profile 2 (cf. Fig. 6).
- 10 Time-averaged radial profiles corresponding to Cases 3 (top) and 4 (bottom) introduced above. Instantaneous data have been averaged for time periods corresponding to several convective overturns. Left: Radially-averaged temperature as well as minimum and maximum temperatures at a given radius. Center: Upwelling (circles) and downwelling (diamonds) velocities. Right: Radial advective  $q_{adv}$  and diffusive  $q_{di}$  heat fluxes and total power (circles) through a given radius - radial advection vanishes on the ( $r = r_b$ ) and ( $r = r_t$ ) boundaries while radial diffusion is small in the convective region. Dimensionless power  $P(r)$  (see text) should be constant throughout the layer for a steady-state flow. This value is plotted with symbols on the right panel.
- 11 Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for stationary temperature and flow fields corresponding to Case 1.
- 12 Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for stationary temperature and flow fields corresponding to Case 2.
- 13 Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for instantaneous temperature and flow fields corresponding to Case 3.
- 14 Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for instantaneous temperature and flow fields corresponding to Case 4.



**Figure 1.** The sphere decomposed into six blocks and the curvilinear coordinate system on block 0. The main difference with spherical coordinates is that curves of constant values of the second coordinate  $\eta$  are great circles (or “horizontal meridians”) and not parallels.

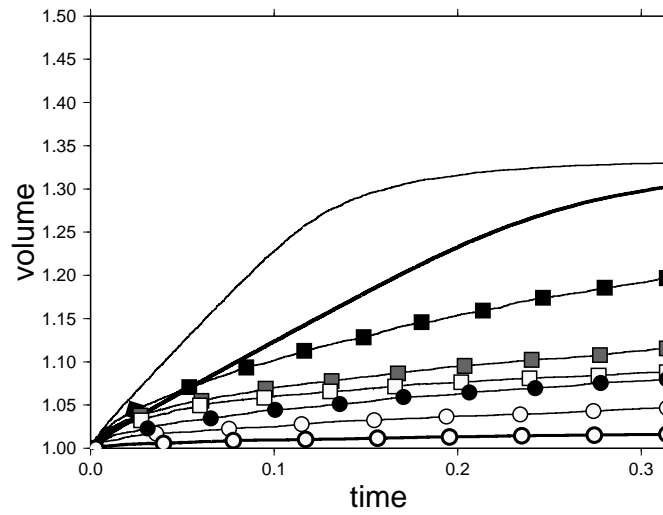


**Figure 2.** The grid mesh as six “cubic” blocks. The azimuthal dimension of cells varies linearly with the radius.

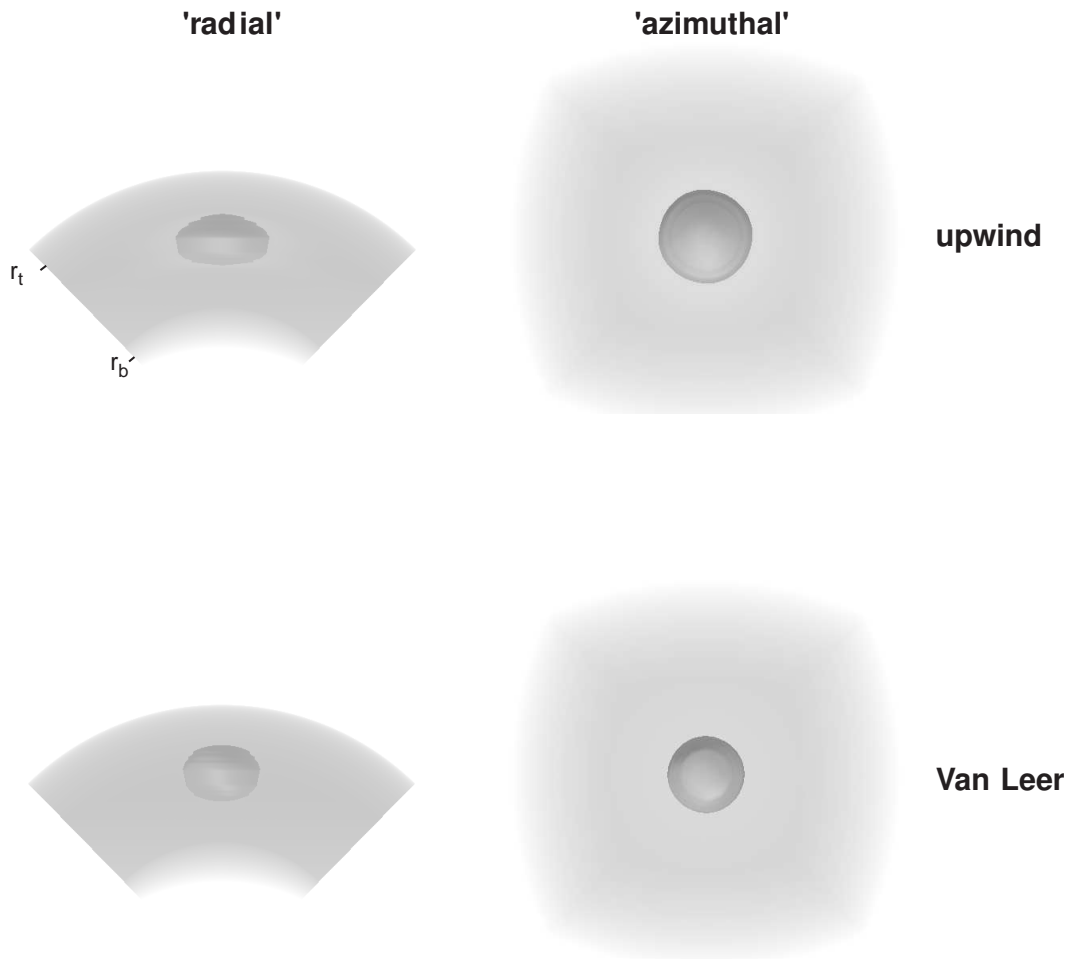


**Figure 3.** Structure of the modified ‘cubed sphere’ coordinate system on other blocks: the original orientation of the curvilinear coordinates is modified due to the array structure of velocity fields in a staggered grid mesh approach (see text for further details).

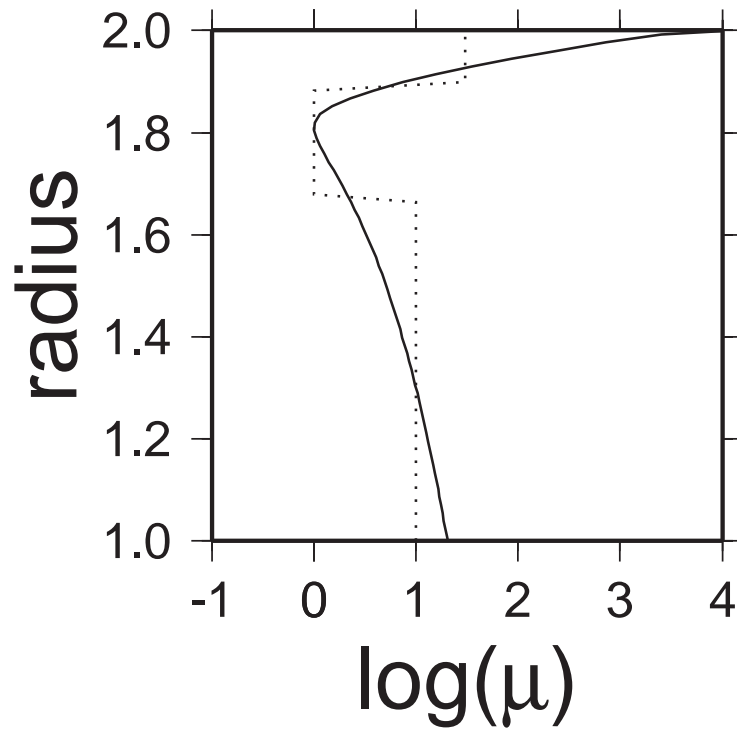




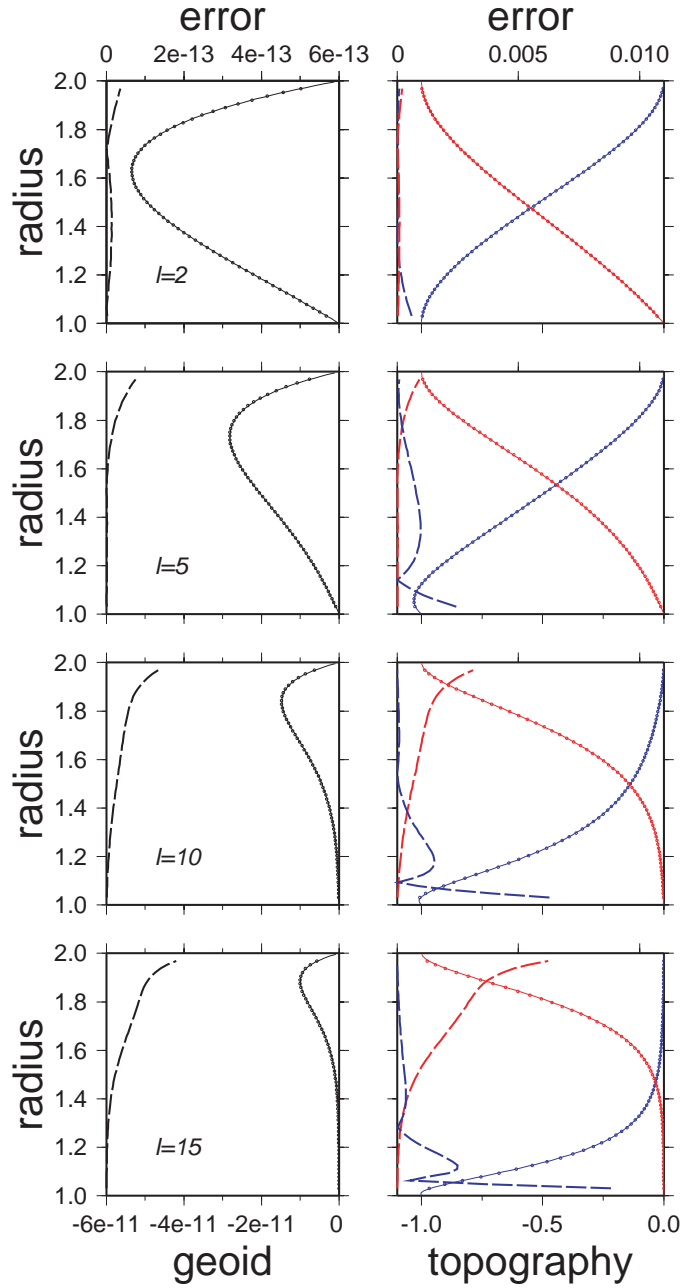
**Figure 4.** Comparison of the different advection schemes: normalized volume delimited by the 0.2 isotherm as a function of time. Regular lines refer to a  $32^3$  grid mesh for block 0, bold lines refer to a  $64^3$  grid mesh. The lines without symbols are associated to the reference upwind scheme. Squares refer to the MPDATA scheme with increasing values of the number of ‘anti-diffusive’ steps associated to the shade:  $iord = 2$  (black),  $iord = 3$  (grey),  $iord = 4$  (white). Circles refer to the van-Leer method with either slope 1 (white circles) or slope 2 (black circles), see Appendix A for further details on the slopes. Time 0.314 approximately corresponds to ten rotation cycles for the velocity field we chose.



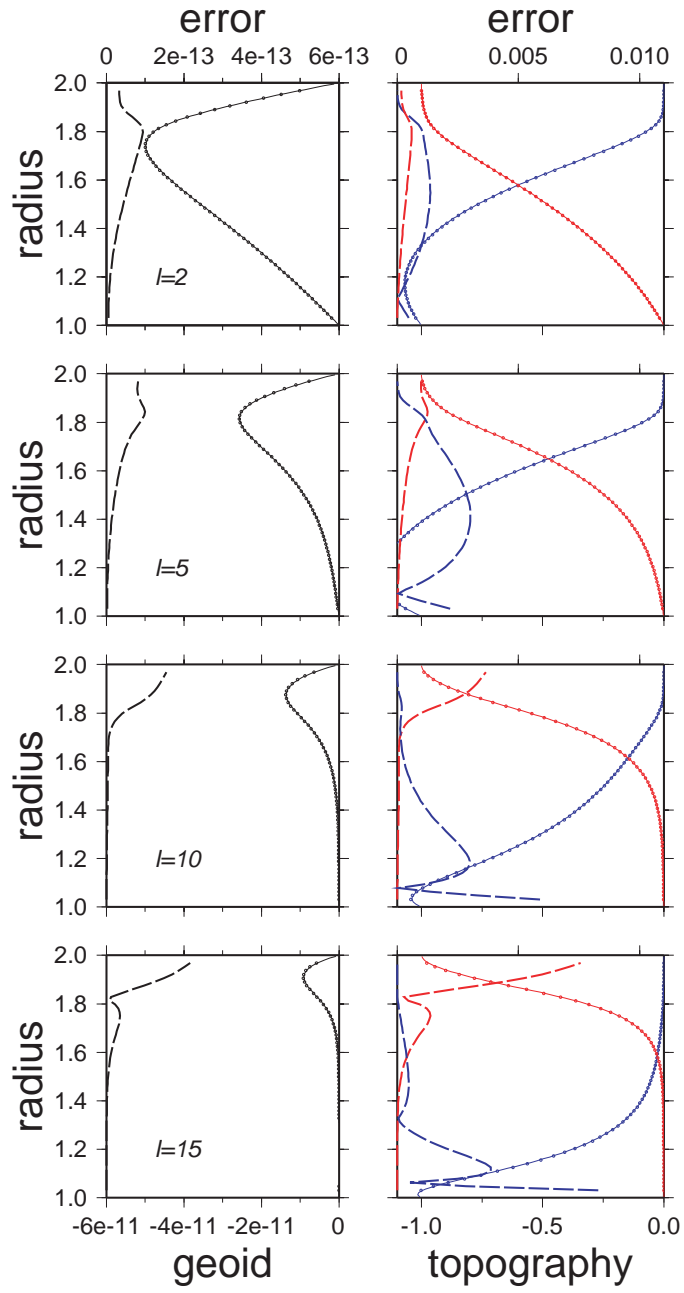
**Figure 5.** Volume of the  $T = 0.2$  isotherm after one full rotation on a  $64^3$  grid mesh. Upper panel: results for the upwind difference scheme. Lower panel: results for the van Leer method with slope 2.



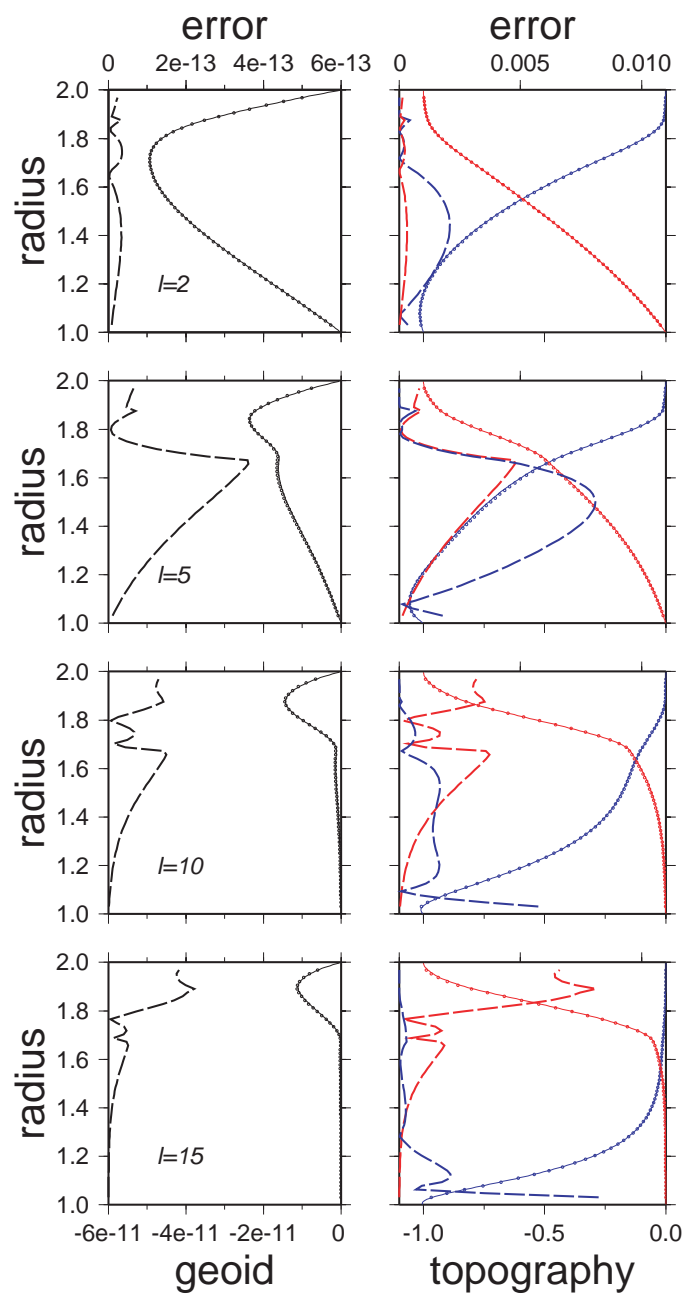
**Figure 6.** Viscosity profiles used for the ‘response function’ benchmark of the flow solver: the solid line curve is test profile 1 - the dotted step-like curve is test profile 2.



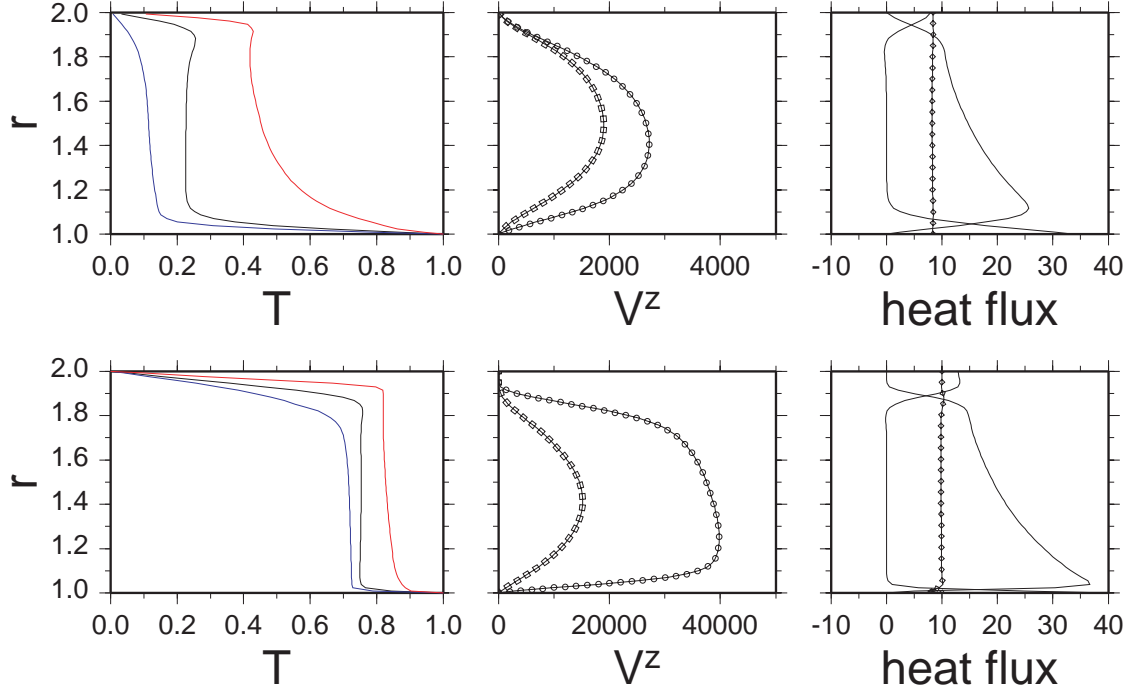
**Figure 7.** Response functions obtained by the spectral method (solid line) and by the CEDIPUS solver (open circles) and the associated error. On the left panel, dimensionless geoid, on the right panel, dimensionless dynamic topographies (blue: ‘CMB’ topography, red: surface topography). The dashed line with the same color indicates the ‘error’ (i.e. the absolute difference between two values at a given radius). Note that the scale for this difference is 100 times larger than the one corresponding to the related variable in order to represent values of about a percent of the maximum value. Four spherical harmonic degrees are presented:  $l = 2, 5, 10, 15$ . In this first case, the material is isoviscous.



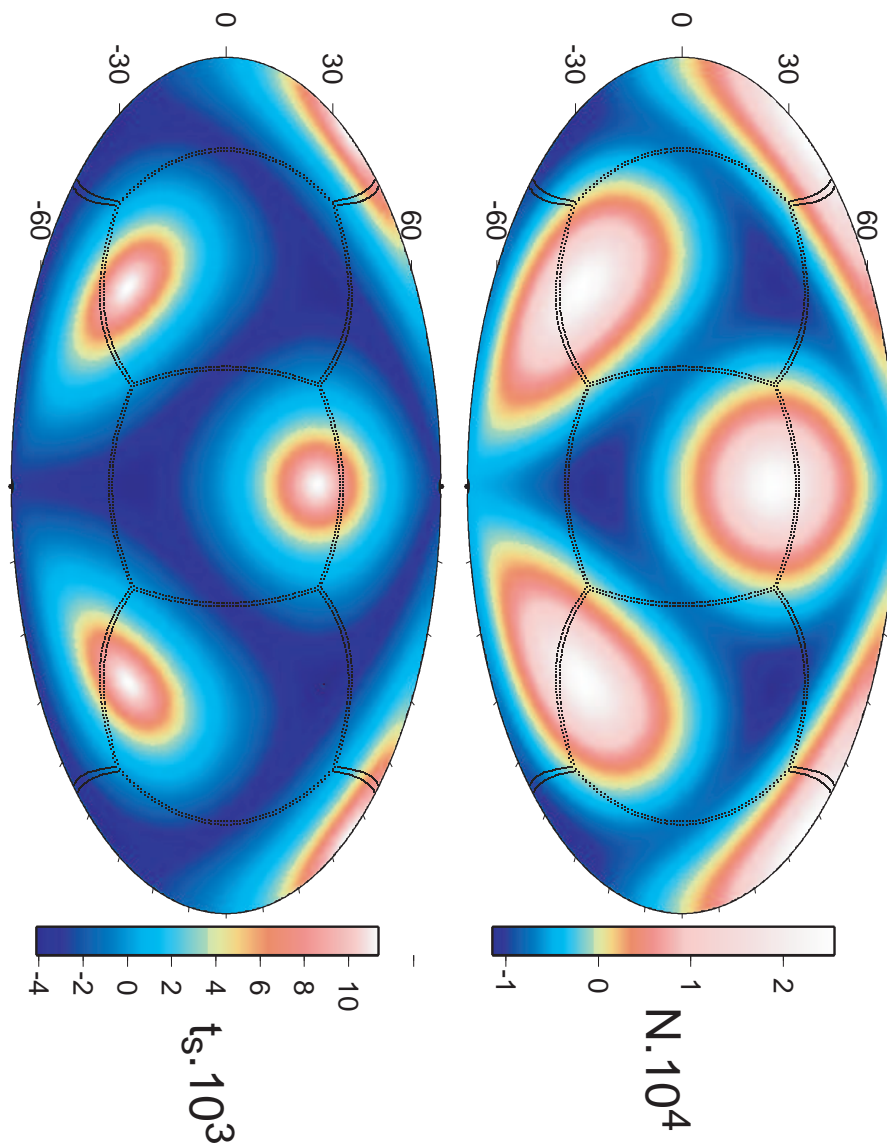
**Figure 8.** Same than Fig. 7 for curved viscosity profile 1 (cf. Fig. 6).



**Figure 9.** Same than Fig. 7 for step-like viscosity profile 2 (cf. Fig. 6).

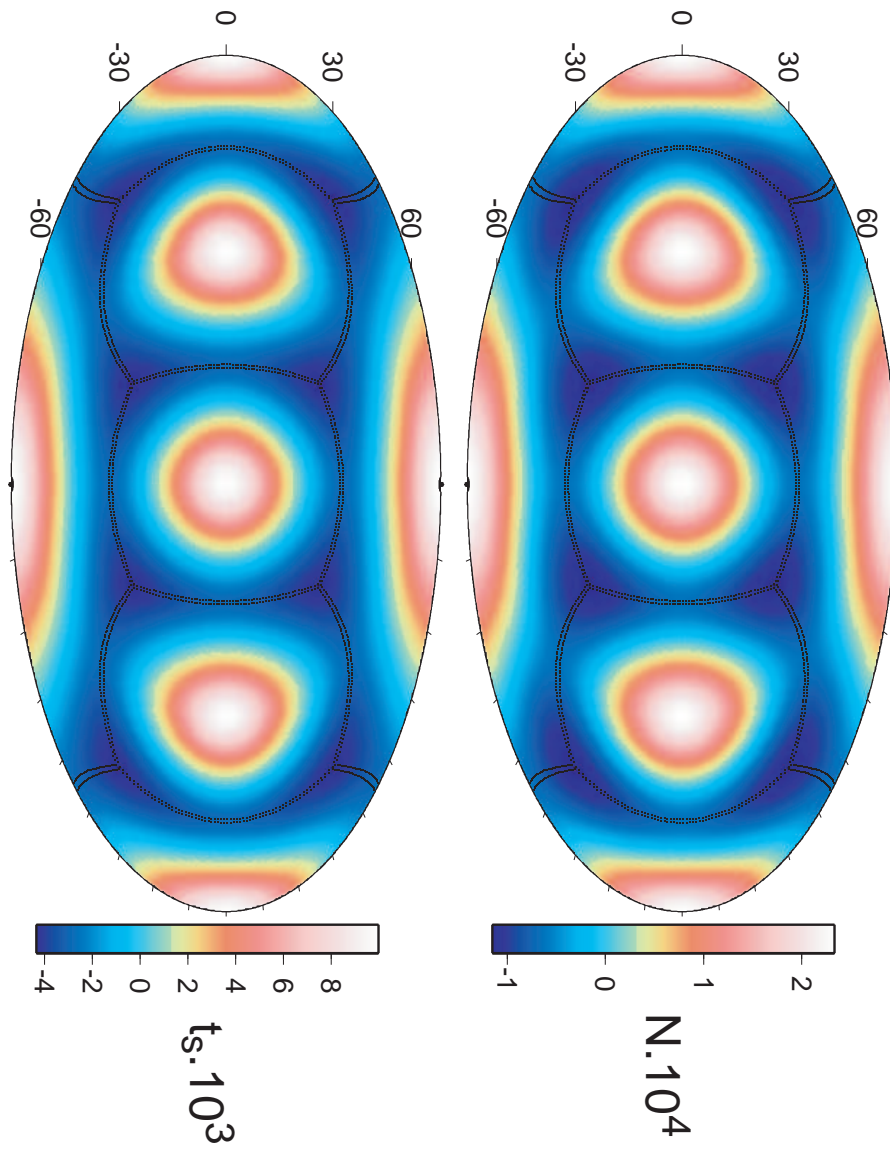


**Figure 10.** Time-averaged radial profiles corresponding to Cases 3 (top) and 4 (bottom) introduced above. Instantaneous data have been averaged for time periods corresponding to several convective overturns. Left: Radially-averaged temperature as well as minimum and maximum temperatures at a given radius. Center: Upwelling (circles) and downwelling (diamonds) velocities. Right: Radial advective  $q_{adv}$  and diffusive  $q_{di}$  heat fluxes and total power (circles) through a given radius - radial advection vanishes on the ( $r = r_b$ ) and ( $r = r_t$ ) boundaries while radial diffusion is small in the convective region. Dimensionless power  $P(r)$  (see text) should be constant throughout the layer for a steady-state flow. This value is plotted with symbols on the right panel.

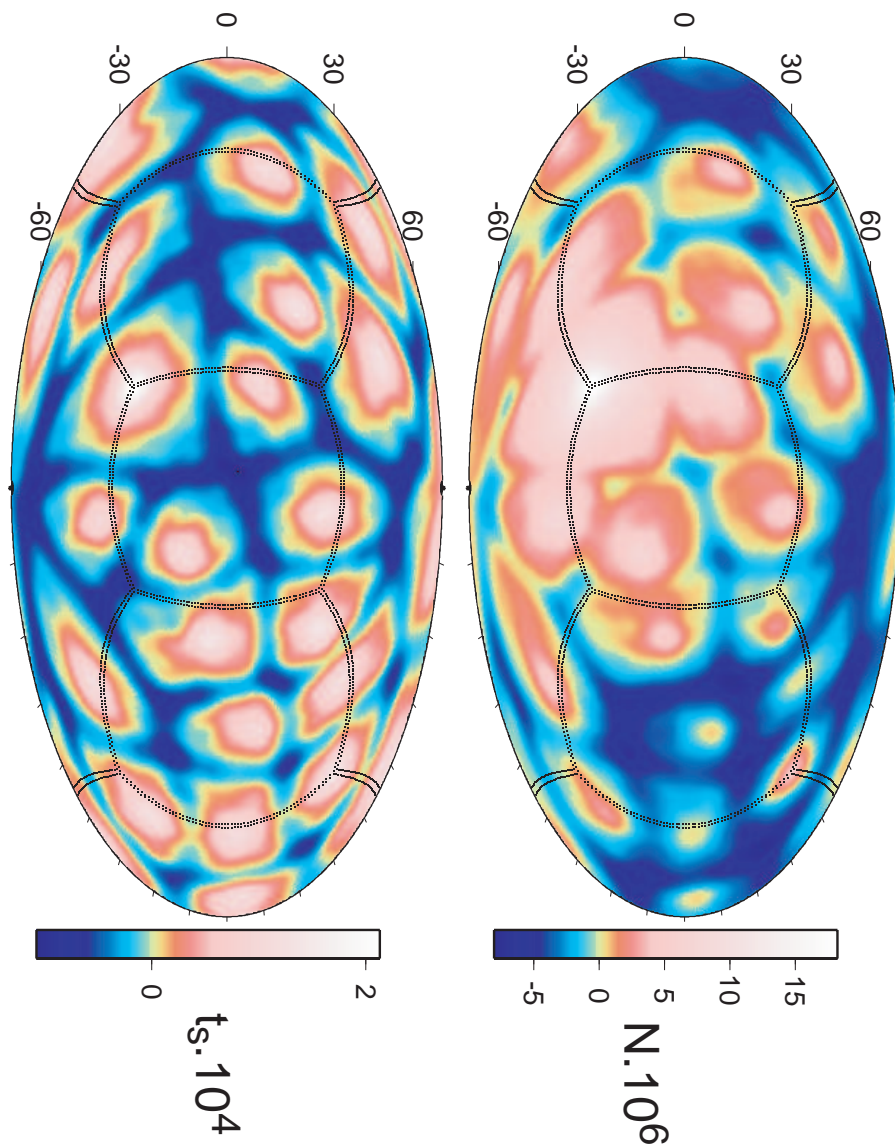


**Figure 11.** Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for stationary temperature and flow fields corresponding to Case 1.

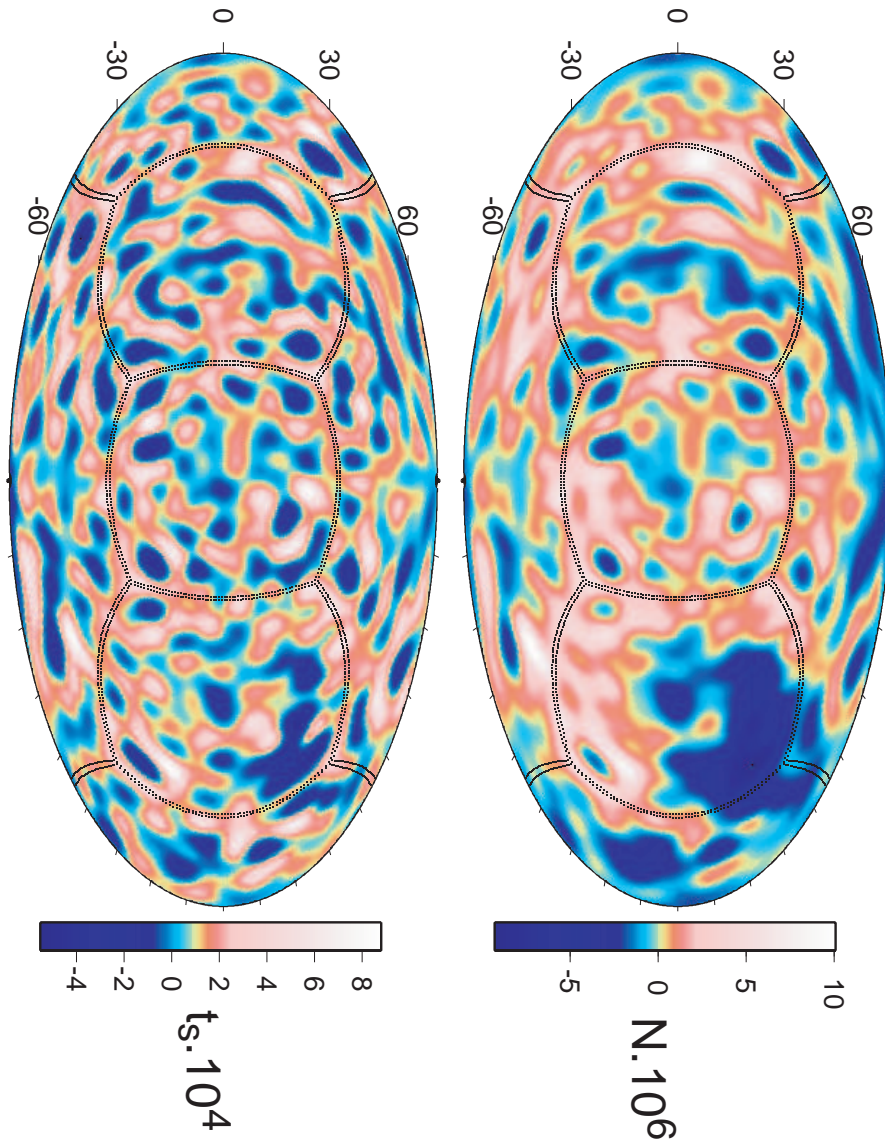




**Figure 12.** Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for stationary temperature and flow fields corresponding to Case 2.



**Figure 13.** Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for instantaneous temperature and flow fields corresponding to Case 3.



**Figure 14.** Surface dynamic topography (T) and geoid (N) obtained for instantaneous temperature and flow fields corresponding to Case 4.

**LIST OF TABLES**

- 1 Variables and symbols.
- 2 The modified “cubed sphere” coordinate system.
- 3 CPU cost of the advection schemes.
- 4 List of the presented calculations with the values of the dimensionless parameters: ratio between the two radii bounding the spherical shell ( $f$ ), surface Rayleigh number ( $Ra$ ), exponential viscosity parameter ( $\gamma$ ), dimensionless volumetric heating ( $h$ ), mechanical boundary condition on the two spherical interfaces. The comment in the last column refers to the shape of the initial temperature perturbation for the two first cases.
- 5 Benchmark tests for an isoviscous fluid. For the two runs,  $f = 0.55$  (close to the Earth’s mantle curvature). Case 1:  $Ra = 7 \times 10^3$ , tetrahedral solution - Case 2:  $Ra = 3.5 \times 10^3$ , cubic solution. The code in the first column refers to the models used for comparison: B89 (Bercovici et al., 1989), H96 (Harder & Christensen, 1996), R96 (Ratcliff et al., 1996), Z00 (Zhong et al., 2000), Y04 (Yoshida & Kageyama, 2004), S06 (Stemmer et al., 2006), C06 is the present study. The number of cells in the radial direction ( $N^r$ ) as well as the approximate mesh size used to produce the results appear in column 2. Surface ( $Nu_{top}$ ) and bottom ( $Nu_{bot}$ ) Nusselt numbers are indicated as well as the *rms* of the velocity field ( $V_{rms}$ ).
- 6 Global scalar values characteristic of Cases 3 and 4. These values are time-averages corresponding to the profiles displayed in Fig. 10. Nusselt numbers, boundary layers (and stagnant lid) thicknesses, temperature differences across the boundary layers (and the stagnant lid). Boundary layer thicknesses refer to the radius where radial advection and radial diffusion are equal. The stagnant lid thickness is defined with the radius of the intersection between the tangent to the advective profile (cf. Fig. 10) through its inflexion point and the zero-flux axis (cf. Davaille & Jaupart, 1993).
- 7 Acceptable range for dimensionless parameters  $E$  and  $G^*$  (as well as internal Rayleigh number  $Ra_i$  and dimensionless radius of curvature  $f$  of the shell as an indication). The two endmembers values for  $E$  (from Mercury, or a small silicate mantle, to Venus or a large silicate mantle) are not associated to the same objects than for  $G^*$  (from Europa, or a thin icy crust, to Venus, or a large silicate mantle). Note that most of the crude estimates within this table can be debated (especially the values of  $d$ ,  $\Delta T$  and  $\mu_0$ ). Gravitational constant  $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3.s^{-2}.kg^{-1}$ .

**Table 1.** Variables and symbols.

symbol	associated constant or variable	unit
$\alpha$	thermal expansivity	$K^{-1}$
$d$	thickness of the shell	$m$
$\delta_{ij}$	Kronecker delta (1 if $i = j$ , 0 if $i \neq j$ )	—
$\Delta\rho_c$	density difference across the bottom interface	$kg.m^{-3}$
$\Delta T$	temperature difference across the shell	$K$
$E$	thermal expansion dimensionless parameter (see 4.1)	—
$f$	ratio between the two radii, $f = \tilde{r}_b/\tilde{r}_t = r_b/r_t$	—
$g$	gravitational acceleration	$m.s^{-2}$
$G$	gravitational constant	$m^3.s^{-2}.kg^{-1}$
$G^*$	gravitational dimensionless parameter (see 4.1)	—
$\gamma$	viscosity exponential parameter	—
$\tilde{h}, h$	volumetric heating rate, dimensionless value	$W.m^{-3}$ , —
$k, \kappa$	thermal conductivity, thermal diffusivity	$W.m^{-1}.K^{-1}$ , $m^2.s^{-1}$
$\mu, \mu_0$	dimensionless viscosity, surface (reference) viscosity	—, $Pa.s$
$\tilde{N}, N$	geoid height, dimensionless value	$m$ , —
$N^g$	number of grid cells	—
$p^*$	dimensionless pressure	—
$\mathbf{r}$	unit radial vector	—
$\tilde{r}_b, r_b$	inner radius (e.g. radius of the CMB), dimensionless value	$m$ , —
$\tilde{r}_t, r_t$	outer radius (e.g. radius of the planet), dimensionless value	$m$ , —
$\rho_0$	surface (reference) density	$kg.m^{-3}$
$Ra, Ra_i$	surface Rayleigh number, internal Rayleigh number	—, —
$\tilde{\sigma}_{rr}, \sigma_{rr}$	normal radial stress, dimensionless value	$Pa$ , —
$\tilde{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{rr}$	average normal radial stress, dimensionless value	$Pa$ , —
$T$	dimensionless temperature	—
$\tilde{t}_s, t_s$	surface dynamic topography, dimensionless value	$m$ , —
$\tilde{t}_c, t_c$	bottom dynamic topography, dimensionless value	$m$ , —
$\tau$	deviatoric part of the dimensionless stress tensor	—
$\theta, \phi$	spherical coordinates (co-latitude, longitude)	—
$\tilde{U}, U$	gravity potential, dimensionless value	$m^2.s^{-2}$ , —
$\tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{V}$	velocity field, dimensionless value	$m.s^{-1}$ , —
$\xi, \eta, \Delta\xi, \Delta\eta$	cubed sphere angular coordinates, angular increments	—
$X, Y, \delta, C, D$	cubed sphere auxiliary variables	—
$Y_{\ell m}$	spherical harmonic function of degree $\ell$ and order $m$	—
$\bullet_{\ell m}$	coefficient for variable $\bullet$ associated to degree $\ell$ and order $m$	—

**Table 2.** The modified “cubed sphere” coordinate system.

block #	CS to Cartesian	CS to spherical	Cartesian and spherical to CS	transformation matrix
equator 0 ( $\zeta_i, 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \\ y = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{C}{Y} \\ z = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi \\ \tan\theta \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{r}{C/Y} \\ Y = \frac{r}{\tan\phi} \\ Z = \frac{r}{\tan\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = -V_\eta + \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\xi \\ V_\phi = \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\xi \end{cases}$
equator 1 ( $\eta_i, 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{-r}{\sqrt{\delta}} \frac{X}{Y} \\ y = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{X}{Y} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi \\ \tan\theta \end{cases}$	$\begin{cases} X = -\frac{r}{Y} \\ Y = \frac{r}{\tan\phi} \\ Z = \frac{r}{\tan\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = -V_\eta + \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\xi \\ V_\phi = \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\xi \end{cases}$
equator 2 ( $\zeta_i, 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{-r}{\sqrt{\delta}} \frac{X}{Y} \\ y = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{Y}{D/X} \\ z = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi \\ \tan\theta \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{r}{D/X} \\ Y = \frac{r}{\tan\phi} \\ Z = \frac{r}{\tan\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = V_\xi - \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\eta \\ V_\phi = \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\eta \end{cases}$
equator 3 ( $\eta_i, 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{Y}{D/X} \\ y = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \\ z = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{Y}{D/X} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi \\ \tan\theta \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{r}{D/X} \\ Y = \frac{r}{\tan\phi} \\ Z = \frac{r}{\tan\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = V_\xi - \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\eta \\ V_\phi = \frac{XY}{\sqrt{CD}} V_\eta \end{cases}$
north pole 4 ( $z_i, 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{-r}{\sqrt{\delta}} \frac{X}{Y} \\ y = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{Y}{\sqrt{\delta-1}} \\ z = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi \\ \tan\theta \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{-r}{\sqrt{\delta-1}} \\ Y = \frac{r}{\tan\phi} \\ Z = \frac{r}{\tan\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = \frac{1}{\sqrt{\delta-1}} \left( \frac{X}{Y} V_\eta + \frac{Y}{X} V_\xi \right) \\ V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\delta-1}} \left( -\frac{X}{Y} V_\eta + \frac{Y}{X} V_\xi \right) \end{cases}$
south pole 5 ( $z_i, 0$ )	$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{X}{Y} \\ y = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \frac{Y}{\sqrt{\delta-1}} \\ z = \frac{r}{\sqrt{\delta}} \end{cases}$	$\begin{cases} \tan\phi \\ \tan\theta \end{cases}$	$\begin{cases} X = \frac{r}{\sqrt{\delta-1}} \\ Y = \frac{r}{\tan\phi} \\ Z = \frac{r}{\tan\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} V_\theta = -\frac{1}{\sqrt{\delta-1}} \left( \frac{X}{Y} V_\eta + \frac{Y}{X} V_\xi \right) \\ V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\delta-1}} \left( \frac{X}{Y} V_\eta - \frac{Y}{X} V_\xi \right) \end{cases}$

**Table 3.** CPU cost of the advection schemes.

method	normalized CPU cost
upwind	1
MPDATA (iord=2)	2.4
MPDATA (iord=3)	3.2
MPDATA (iord=4)	3.9
van Leer (slope 1)	2
van Leer (slope 2)	2.1

**Table 4.** List of the presented calculations with the values of the dimensionless parameters: ratio between the two radii bounding the spherical shell ( $f$ ), surface Rayleigh number ( $Ra$ ), exponential viscosity parameter ( $\gamma$ ), dimensionless volumetric heating ( $h$ ), mechanical boundary condition on the two spherical interfaces. The comment in the last column refers to the shape of the initial temperature perturbation for the two first cases.

Case	$f$	$Ra$	$\gamma$	$h$	boundary condition	comment
1	0.55	$7 \times 10^3$	0	0	stress-free	tetrahedral
2	0.55	$3.5 \times 10^3$	0	0	stress-free	cubic
3	0.5	$1.4 \times 10^6$	0	0	no-slip	—
4	0.5	$10^3$	15	10	no-slip	—



**Table 5.** Benchmark tests for an isoviscous fluid. For the two runs,  $f = 0.55$  (close to the Earth’s mantle curvature). Case 1:  $Ra = 7 \times 10^3$ , tetrahedral solution - Case 2:  $Ra = 3.5 \times 10^3$ , cubic solution. The code in the first column refers to the models used for comparison: B89 (Bercovici et al., 1989), H96 (Harder & Christensen, 1996), R96 (Ratcliff et al., 1996), Z00 (Zhong et al., 2000), Y04 (Yoshida & Kageyama, 2004), S06 (Stemmer et al., 2006), C06 is the present study. The number of cells in the radial direction ( $N^r$ ) as well as the approximate mesh size used to produce the results appear in column 2. Surface ( $Nu_{top}$ ) and bottom ( $Nu_{bot}$ ) Nusselt numbers are indicated as well as the *rms* of the velocity field ( $V_{rms}$ ).

Reference	$N^r$ (Mesh size)		Case 1			Case 2		
			$Nu_{top}$	$Nu_{bot}$	$V_{rms}$	$Nu_{top}$	$Nu_{bot}$	$V_{rms}$
B89	12	$(2 \times 10^3)$	3.4657	3.5293	-	2.7954	-	-
H96	120	$(6 \times 10^5)$	3.4957	-	-	-	-	-
R96	40	$(2 \times 10^5)$	3.4423	-	32.19	2.8306	-	18.86
Z00	24	$(2 \times 10^5)$	3.519	3.472	-	-	-	-
Y04	102	$(2 \times 10^6)$	3.443	-	32.0481	2.8830	-	18.4801
S06	48	$(7 \times 10^5)$	3.4864	3.4864	32.5894	-	-	-
C06	32	$(2 \times 10^5)$	3.4814	3.4717	32.743	2.8640	2.8948	19.546

**Table 6.** Global scalar values characteristic of Cases 3 and 4. These values are time-averages corresponding to the profiles displayed in Fig. 10. Nusselt numbers, boundary layers (and stagnant lid) thicknesses, temperature differences across the boundary layers (and the stagnant lid). Boundary layer thicknesses refer to the radius where radial advection and radial diffusion are equal. The stagnant lid thickness is defined with the radius of the intersection between the tangent to the advective profile (cf. Fig. 10) through its inflexion point and the zero-flux axis (cf. Davaille & Jaupart, 1993).

Case	Nusselt number		top	Thickness		lid	Temperature difference		
	top	bot		bot			top	bot	lid
3	7.910	7.948	$2.90 \times 10^{-2}$	$2.31 \times 10^{-2}$		-	0.231	0.775	-
4	12.88	9.980	$1.63 \times 10^{-2}$	$7.39 \times 10^{-3}$		$3.90 \times 10^{-2}$	0.210	0.295	0.503

**Table 7.** Acceptable range for dimensionless parameters  $E$  and  $G^*$  (as well as internal Rayleigh number  $Ra_i$  and dimensionless radius of curvature  $f$  of the shell as an indication). The two endmembers values for  $E$  (from Mercury, or a small silicate mantle, to Venus or a large silicate mantle) are not associated to the same objects than for  $G^*$  (from Europa, or a thin icy crust, to Venus, or a large silicate mantle). Note that most of the crude estimates within this table can be debated (especially the values of  $d$ ,  $\Delta T$  and  $\mu_0$ ). Gravitational constant  $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3.s^{-2}.kg^{-1}$ .

	Europa	Ganymede	Mercury	Venus
$\rho_0 (kg.m^{-3})$	1000	1000	3500	3500
$g (m.s^{-2})$	1.5	1.5	3	10
$d (m)$	$3 \times 10^4$	$10^5$	$5 \times 10^5$	$3 \times 10^6$
$\tilde{r}_t (m)$	$1.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$1.5 \times 10^6$	$6 \times 10^6$
$\kappa (m^2.s^{-1})$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
$\mu_0 (Pa.s)$	$10^{14}$	$10^{15}$	$10^{21}$	$10^{21}$
$\alpha (K^{-1})$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\Delta T (K)$	150	150	500	3000
$E$	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-2}$	$\sim 5 \times 10^{-3}$	$\sim 3 \times 10^{-2}$
$G^*$	$\sim 10^{-3}$	$\sim 4 \times 10^{-3}$	$\sim 4 \times 10^{-2}$	$\sim 7 \times 10^{-2}$
$Ra_i$	$\sim 6 \times 10^6$	$\sim 2 \times 10^7$	$\sim 7 \times 10^3$	$\sim 3 \times 10^7$
$f$	0.98	0.96	0.66	0.5









## Résumé

Nous avons utilisé les données gravimétriques de Mars Global Surveyor pour étudier la ligne de rivage martienne Deuteronilus. Les variations du potentiel de pesanteur le long de ce contact et l'estimation des limites géographiques de celui-ci permettent de mettre en évidence la déformation de la planète au Noachien supérieur et de déterminer les caractéristiques de l'océan martien primordial. L'hypsométrie de la topographie de Mars traduit des phénomènes qui, sur Terre, sont associés à des processus d'isostasie thermique et qui, ici, correspondent à la région qui a abrité cet océan.

La seconde partie de ce travail traite de la dynamique interne des planètes telluriques et de son lien avec les observables géophysiques. En l'absence de données sismologiques, la mesure du champ de gravité d'une planète et de son relief fournit une contrainte de premier ordre sur la nature de la structure interne. Nous proposons donc le calcul systématique du géoïde et de la topographie dynamique associés à des modèles numériques 3D sphériques de la dynamique interne (convection thermique pour un fluide à viscosité variable). Une méthode spectrale de calcul est proposée dans un cadre adimensionné. L'analyse spectrale de modèles synthétiques de structure interne permet d'évaluer le rôle de certains paramètres clés de la dynamique interne (variations de viscosité, chauffage interne).

Mots-clés : Convection thermique, méthode spectrale, topographie dynamique, géoïde.

## Abstract

Mars Global Surveyor data are used to study the martian Deuteronilus shoreline. The related variations of the gravity potential and the estimation of the geographical limits of this contact highlight the last Noachian deformation of the planet and allow us to determine the characteristics of the primordial martian ocean. Mars hypsometry is related to processes that, on Earth, are associated with thermal isostasy and, on Mars, correspond to the location of this primordial ocean.

The second part of this work deals with internal dynamics of terrestrial planets and its link with geophysical observables. When seismological data are not available, measuring a planet's gravity field and relief provides a first order constraint on the internal structure. We thus propose systematic evaluation of geoid and dynamic topography from 3D spherical numerical models of internal dynamics (thermal convection for a variable viscosity fluid). A spectral method is described in a dimensionless framework. Indeed, the spectral analysis of synthetic models for the internal structure allows us to evaluate the influence of several key parameters of the internal dynamics (viscosity variations, internal heating).